Álgebra e Aritmética

Celso Melchiades Doria

Introdução

A Matemática surgiu pela necessidade de resolver problemas relacionados à contagem, à medição de distâncias, de áreas e volumes e de calcular proporções. Ela evoluiu porque muitos problemas recaem em equações, o que forçou o desenvolvimento da Álgebra e a evolução da natureza abstrata no raciocínio matemático. No passado, muitos problemas recorriam a raciocínios matemáticos algébricos ou geométricos. Podemos afirmar que diversos problemas de cunho matemático são questões que buscam quantificar algo, porém a compreensão da questão e a solução requerem o desenvolvimento de conceitos e de estruturas que fazem a Matemática ter vida própria como uma Ciência Pura. Essencialmente, a Matemática é uma linguagem desenvolvida para abordarmos os problemas de quantificação. Como toda linguagem, a Matemática tem a sua sintaxe, a sua lógica e, portanto, sua vida própria. Dessa forma, o denvolvimento da Matemática agrega enorme valor ao conhecimento humano ao revelar nas suas estruturas muita riqueza e muita efetividade na solução de problemas oriundos de diversas áreas da Ciência e da Tecnologia.

No cerne da Matemática encontra-se o domínio da estrutura lógico dedutiva, a compreensão e a dedução dos fenômenos matemáticos; isso tudo feito a partir de premissas. É fundamental para o desenvolvimento teórico e das técnicas que tenhamos clareza e domínio absoluto sobre os conceitos que alicerçam a sustentação dos raciocínios.

CONTAR

Nos primórdios dos tempos, a primeira necessidade matemática foi a necessidade de contarmos como mostra o osso de Ishango na Figura 1. Inicialmente, contar era muito simples, basicamente contar rebanhos, alimentos, pedras, paus. A contagem sempre era e é realizada comparando com algum conjunto mais conhecido, por exemplo, com o conjunto de dedos de uma mão (5), ou os dedos das duas mãos (10), ou com os dedos das mãos mais os dedos dos pés (20). Diversos sistemas numéricos surgiram no passado para contar. Muitos povos contavam até certa quantia e a partir dela diziam que eram "muitos". Paterlini cita em [2] que indígenas das Ilhas Murray, situadas entre a Austrália e a Nova Giné, utilizavam os seguintes vocábulos para contar:
netat → um,
neis → dois,
neis netat → três,
neis neis → quatro.
Quantidades maiores eram designadas pelo vocábulo *ras*, que significa 'muito". Curiosamente, no inglês temos as palavras *twice* para dizer duas vezes e a palavra *thrice* para designar três vêzes; *thrice* também era usado no inglês arcaico para designar "vários". Essa evidência filológica indica que povos antigos que viveram no Reino Unido talvez contassem apenas até três, quantias superiores eram chamadas de *thrice*.

Para contar é necessário um sistema de numeração e de uma linguagem (representação) de tal forma que toda quantidade tenha uma representação e a representação seja única. A linguagem de um sistema de numeração associa a cada quantidade um símbolo numérico.

Na Figuras 1 e 2 temos a imagem do osso de Ishango encontrado em 1950 pelo belga Jean de Heinzelin de Braucourt enquanto explorava o que era então o Congo Belga. É uma ferramenta de osso e possivelmente um dispositivo matemático que data da era do Paleolítico Superior. O osso curvo é marrom escuro, com cerca de 10 centímetros de comprimento.

Figure 1. Osso de Ishango

Figure 2. Osso de Ishango

A criação dos símbolos numéricos pressupõem a criação de vocábulos para designar as quantidades. A comunicação oral define os vocábulos orais (sons) que evoluem para vocábulos escritos (palavras) na escrita. Assim surgem os numerais. Numeral é um vocábulo utilizado para determinar a quantidade, a ordem, a proporção e outras situações como indicam as subclasses a seguir.

- numeral cardinal: são os vocábulos associados aos números que expressam as quantidades, tais como um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, etc. Os numerais cardinais indicam a quantidade precisa de algo sendo contado. Por exemplo: tenho quatro canetas, duas borrachas e um caderno.
- Numerais ordinais são aqueles que indicam a ordem ou a posição ocupada por um elemento dentro de um conjunto, tais como primeiro, segundo, terceiro, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono, décimo, etc. Por exemplo: Ele é o quarto filho e o sétimo neto.
- Numerais fracionários são aqueles que expressam a fração (proporção) de uma quantidade ou medida, tais como meio ou metade, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono, décimo, onze avos, e etc. Por exemplo: mais de três quartos da população não tomou a vacina por falta de informação.
- Numerais coletivos: são as palavras que designam a quantidade agrupada de elementos de um conjunto. dúzia(s), dezena(s), milheiro(s) ou milhar(es), centena(s), par(es), década(s) etc. Por exemplo: comprei uma dúzia de ovos, haviam centenas de pessoas na fila.
- Numerais multiplicativos são aqueles que indicam uma quantidade equivalente a uma multiplicação, tais como duplo ou dobro, triplo, quádruplo, quíntuplo, sêxtuplo, sétuplo, óctuplo, nônuplo, décuplo, undécuplo, duodécuplo, cêntuplo e etc. Por exemplo: O avô tem o quíntuplo da idade de seu neto mais novo.
- Numerais romanos são usados para marcar o século referente a uma data histórica. Existem 7 símbolos que representam os números romanos: I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000). Por exemplo: Pitágoras viveu no século V a.C.

O vocábulo numeral é usado para designar o nome. O vocábulo número é usado para indicar a idéia abstrata, por exemplo, deveríamos dizer "o número 3 que representa o numeral três é ímpar", mas dizemos que "o número 3 é ímpar" ou " 3 é ímpar".

Através da arte de contar chegamos aos números que formam um conjunto mais complexo do que nos revelam o uso cotidiano deles. A definição e a formalização de um sistema numérico expõem situações que demandam conceitos e idéias muito além do ato de contar.

Números são símbolos, são frutos da inteligência humana, em suma, da sua capacidade cognitiva. No entanto, eles não são meros símbolos, não são algo como os sinais de fumaça. Os números são parte de uma linguagem que compõe a Matemática, a qual é muito rica em estruturas que nos ajudam a entender a Natureza. Serão os números uma criação humana ou fazem parte da natureza do nosso Universo?

Pitágoras de Samos defendia que todas as coisas são números e o princípio fundamental de tudo seria a estrutura numérica, ou seja, o mundo surgiu quando precisou haver uma limitação para o *ápeiron*[1] e essa limitação eram formas numéricas sobre o espaço. Os pitagóricos faziam um amálgama de concepções, como era comum na época. Desse modo, embora racionais e matemáticos, os pitagóricos também baseavam suas doutrinas em concepções místicas.

MEDIR

Uma outra forma de chegar a questões intrigantes relativas a números é através do ato de medir.

Os gregos desenvolveram muito a Geometria. Isso devido a disputa entre filósofos e sofistas, já que os filósofos defendiam a busca por verdades absolutas e encontraram na Matemática uma fonte de verdades imutáveis.

Figure 3. Filósofos x Sofistas

Para Platão, assim como para Sócrates, os conceitos traziam em si uma essência. A postura adotada pelos sofistas, na visão dos filósofos, representava uma falta de compromisso com a

[1]realidade infinita, ilimitada, invisível e indeterminada que é a essência de todas as formas do universo

verdade, uma vez que a verdade era relativizada, podendo ser e não ser qualquer coisa. Neste sentido, os filósofos compreendiam a justiça, a coragem, o amor, como conceitos concretos e imutáveis, com forma e essência. Essa visão de mundo influenciou o pensamento político de Platão. Para ele, o governante tem que passar por uma série de treinamentos (técnicos), como ser iniciado na matemática e em suas derivações. Platão objetiva que, com a contemplação do que há de imutável, como a Matemática, a música e a astronomia, o governante passe a ser capaz de acessar outros conceitos abstratos imutáveis, mas estes também de ordem moral, como a justiça.

Com o desenvolvimento da Geometria e as suas verdades imutáveis, os pitagóricos chegaram a alguns fatos que não sabiam explicar. Para eles, todos os segmentos deveriam ser comparados pela razão do tamanho entre eles, o que sempre seria algo comensurável; hoje em dia significaria que há uma razão $\frac{p}{q}$ entre seus comprimentos, p e q sendo números naturais.

No entanto, o Teorema de Pitágoras, que era bem conhecido, implicava que o tamanho da diagonal de um quadrado não era comensurável com o tamanho do lado. Se o lado do quadrado mede ℓ e a sua diagonal mede d segue que $d^2 = 2\ell^2$. Por exemplo, se $\ell = 1$ temos que $d = \sqrt{2}$, o qual (hoje) sabemos que é um número irracional. Outro problema que os gregos não conseguiram resolver foi o da duplicação de um cubo usando régua e compasso[2].

Duplicação do Cubo: O volume de um cubo C de lado medindo ℓ é $V = \ell^3$. Construa com régua e compasso um cubo C' cujo volume é o dobro do volume de C.

Para duplicarmos o volume de um cubo C teríamos que construir um cubo $C^{'}$ com lado $\ell^{'} = \sqrt[3]{2}\ell$. Fazer a construção usando apenas régua e compasso, sabemos (hoje), é impossível porque $\sqrt[3]{2}$ é irracional. Outro problema clássico que os gregos não conseguiram resolver, e tão pouco entender, foi o problema conhecido como o da quadratura do círculo.

Quadratura do Círculo: Seja C um círculo de raio R. Construa com régua e compasso um quadrado de lado ℓ tal que a área do quadrado seja igual a área do círculo.

A área do quadrado é ℓ^2 e a área do círculo é πR^2, logo o lado do quadrado deve medir $\ell = R\sqrt{\pi}$. Como π é irracional, os gregos não conseguiram fazer a construção, tão pouco entender o motivo da dificuldade. Os gregos não entenderam o que eles denominavam por incomensurabilidade. Os números irracionais não se encaixavam na cosmovisão pitagórica. Essas questões ameaçavam destruir as bases da filosofia de Pitágoras.

ÁLGEBRA

O caminho mais revelador para a compreensão dos números foi o caminho da trilha para resolver equações. Aqui nasceu a Álgebra e a abstração matemática. Essa trilha começou a evoluir a partir do momento em que a representação simbólica para os números se tornou mais apropriada e isso ocorreu com o uso dos algarismos hindu-arábicos para representar os números no sistema decimal.

Uma equação do tipo $2x + 7 = 2$ não tem solução no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, mas tem no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Se $p^{'}, p, q \in \mathbb{Z}$, a solução da equação $qx + p = p^{'}$ é $\frac{p^{'}-p}{q} \in \mathbb{Q}$. Dessa forma, o conjunto $\mathbb{Q}$ é bom para resolver equações lineares com coeficientes inteiros. No entanto, no problema da duplicação do cubo surge a equação $x^3 - 2 = 0$, a qual não tem solução em $\mathbb{Q}$ porque $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

[2] ver o Capítulo sobre Projetos.

A necessidade de sabermos se determinada equação tem solução, ou não, naturalmente gera a necessidade de estabelecermos as propriedades algébricas dos conjuntos numéricos[3].

Vejamos a seguinte equação: sabemos que $0x = 0$ para todo número x. Vamos considerar uma equação simples, por exemplo, seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante e considere a equação

$$\mathrm{ax} = 0. \tag{0.1}$$

Podemos concluir que x=0? Quando $a = 0$ temos que x pode ser qualquer número, uma vez que nada vezes nada deve ser nada. Certo? Porque?

Cabe indagarmos quais as soluções da equação $ax = 0$. Se $a = 0$ há várias soluções. No caso quando $a \neq 0$, seria muito bom que a solução fosse apenas $x = 0$. Isso porque, por exemplo, a equação $3x = 7x$ teria como solução $x = 0$, pois, nesse caso, temos 4x=0. O fato da Equação (0.1) ter solução única x=0 implica que uma equação do tipo $ax + b = c$, onde $a \neq 0$, b e c são constantes, também tenha solução única; caso contrário sejam x_1 e x_2 duas soluções distintas, então

$$ax_1 + b = ax_2 + b \;\Rightarrow\; a(x_1 - x_2) = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Mas será sempre verdade que $ax = 0$ implica que $a = 0$ ou $x = 0$? Para ter a devida monta sobre a importância da pergunta, vejamos a seguinte situação constrangedora: assumiremos que $x = y$ e multiplicamos ambos os lados da igualdade por x, assim temos que $x^2 = xy$. Agora, ao extraírmos em ambos os lados a quantia y^2 para obtermos

$$x^2 - y^2 = xy - y^2.$$

Segue que

$$(x + y)(x - y) = y(x - y).$$

Ao simplificarmos, em ambos os lados, o termo $(x - y)$ obtemos

$$x + y = y.$$

Por hipótese, temos que $x = y$, logo $2y = y$. Portanto,

$$\boxed{2 = 1.}$$

Onde esta o erro? Claro, tem que haver um erro!

Há diversas falácias que podem ser construídas se não entendermos perfeitamente como funcionam as operações, para isso precisamos ter total conhecimento sobre as suas propriedades.

Porque $(-1).(-1) = 1$? Ou, equivalentemente, porque a multiplicação de dois números negativos resulta num positivo. Números negativos podem geram alguns desconfortos, por exemplo

$$6 = \sqrt{36} = \sqrt{4.9} = \sqrt{(-4).(-9)} = \sqrt{-4}.\sqrt{-9} = (2i).(3i) = 6i^2 = -6.$$

Aqui usamos os números complexos, onde $i = \sqrt{-1}$.

Calcular 786×267345 a "mão" pode ser demorado mas é factível. O processo é similar ao cálculo 2×3. A multiplicação de números racionais pode ser realizada usando um ábaco. Já a multiplicação $\pi.\sqrt[3]{7}$ não é possível com ábaco; é possível obter um resultado aproximado. O mesmo ocorre com potenciação, o cálculo de 2^3 é simples, assim como é 7^5. Simples significa que o cálculo pode ser realizado a "mão", embora demorado. Já, a situação se complica para

[3] As propriedades operatórias.

calcularmos $2^{\sqrt{2}}$. Porque? E se quisermos calcular $(\pi)^{\sqrt{2}}$? Quando escrevemos $\sqrt{2}$ ou π estamos escrevendo símbolos que não nos dizem o real valor desses números, estamos tão habituados que respondemos com naturalidade que $(\sqrt{2})^2 = 2$, pois foi assim que definimos $\sqrt{2}$. Qual são os valores numéricos de π e de $\sqrt{2}$?

A Casa da Moeda, responsavel pela emissão de notas de dinheiro, nunca emitiu uma nota no valor de R\$ $\sqrt{-1}$, mas poderia. Por exemplo, uma vez que

$$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \tag{0.2}$$

poderia emitir duas notas uma de $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e a outra de $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Não seria sensacional? Pagariamos o ônibus com essas notas. A Expressão (0.2) decorre da fórmula de Cardano aplicada para resolvermos a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Observamos que os números complexos da forma a+ib, a e b números reais e $i = \sqrt{-1}$, surgem quando resolvemos equações polinomiais.

Segue da discussão acima que é necessário entender o conceito de número e as suas propriedades operatórias conforme a teoria de equações demanda. Hoje usamos o sistema numérico decimal baseado nos símbolos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Os romanos usavam os símbolos $\{I, V, X, L, C, D, M\}$ para representar os números e, claramente, os algarismos romanos dificultam enormemente o cálculo.

No entanto, vivemos na chamada era *Digital*. Computadores usam o sistema binário $\{0, 1\}$ para representar os números. Um sistema digital é um conjunto de dispositivos de transmissão, processamento ou armazenamento de sinais digitais que usam valores discretos (descontínuos). A palavra digital tem origem no latim digitus (palavra latina para dedo), uma vez que os dedos eram usados para contagem discreta. O seu uso é mais comum em computação e electrônica, sobretudo onde a informação real é convertida na forma numérica binária como no som digital ou na fotografia digital. Os sistemas não digitais, ou analógicos, usam um intervalo contínuo de valores para representarem informação.

Sendo assim, compreender número é uma tarefa fundamental na Matemática. Tarefa essa menos necessária, ou completamente desnecessária, para quem os use nas outras áreas do conhecimento, pois basta saber operar com eles. Por exemplo, quem assiste televisão, usa computador ou usa celular não precisa saber de eletrônica ou programação, basta ter domínio sobre os controles, mouses e teclados. Isso não invalida que o sistema educacional aborde o conteúdo sobre números de forma abrangente e teórica, visando resolver problemas e tornar o estudante muito bem formado e muito bem informado.

Números estão na base da Aritmética, a qual esta na base da Álgebra. As equações são o néctar, as estruturas que surgem ao estudá-las é o mel.

Talvez uma das mais famosas e enigmáticas identidades na Matemática seja a Equação de Euler

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1 \tag{0.3}$$

A compreensão da misteriosa Equação de Euler requer conhecimento e domínio sobre os números, juntamente com as suas propriedades operatórias. O mesmo deve ser dito sobre o cálculo de $(\pi)^{\sqrt{2}}$.

Contents

Introdução i

Chapter 1. Sistemas Numéricos 1
1. Sistema Decimal e Números Naturais 4
2. Sistema Decimal e Números Reais 20
3. Números Naturais: Construção e Propriedades 31
4. Números Naturais $\mathbb{N}$ 31
5. Números Inteiros $\mathbb{Z}$ 39
6. Números Naturais Racionais $\mathbb{Q}$ 40
7. Sequências I 40
8. Criptografia I 40

Bibliography 41

CHAPTER 1

Sistemas Numéricos

A evolução da representação numérica foi fundamental para a evolução do pensamento abstrato e para a evolução da Álgebra, por conseguinte, para a evolução da Matemática. Segundo os historiadores, foram os hindus e os árabes que criaram e aprimoraram o sistema numérico decimal que usamos nos dias de hoje, também conhecido como sistema hindu-arábico. O sistema numérico decimal é baseado nos *algarismos decimais* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; aos quais nos referimos também como números ou símbolos numéricos. Com apenas esses algarismos, os povos hindu-arábicos desenvolveram um método capaz de representar qualquer quantidade. Devemos muito a eles por terem aprimorado o sistema de algarismos numéricos. No passado, há exemplos de outros sistemas numéricos usados que, devido a complexidade para realizar operações aritméticas, deixaram de ser usados. As dificuldades para elaborar raciocínios abstratos criadas por um sistema numérico de má qualidade gera inúmeros obstáculos para resolvermos problemas das mais diversas áreas do conhecimento humano, por exemplo, contábil. Na Babilônia eles usavam o sistema sexagesimal de algarismos mostrados na Figura 1. No Império Romano os números eram escritos a partir dos algarismos (símbolos) $\{\mathrm{I}, \mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{M}\}$.

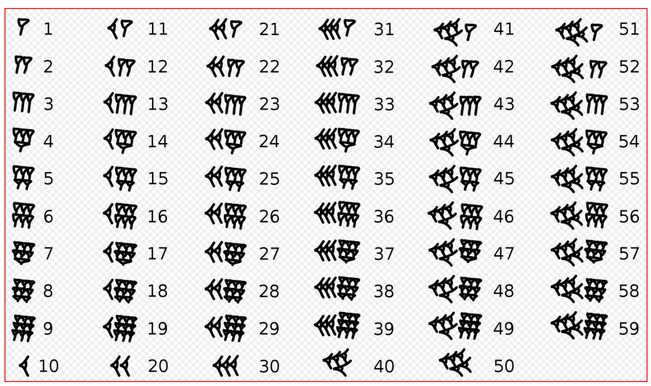

FIGURE 1. Sistema sexagesimal babilônio

A representação dos números adotada pelos romanos é muito mais inapropriada, ineficiente e operacionalmente custosa para efetuar cálculos se comparado com os algarismos hindu-arábicos. O mesmo para, por exemplo, o sistema quipo criado pelos Incas baseado em contar cordas e nós. Esses sistemas são infinitamente mais ineficientes do que o sistema numérico hindu-arábico, portanto não abordaremos, mas vale a curiosidade histórica disponível em [2]. Creio que os sistemas romano, quechua, sumério e tantos outros, dificilmente obteriam a Equação de Euler $e^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$.

Todos aprendem sobre números na Escola Fundamental. Aqueles com mais de 7 anos de idade já gozam de boa familiaridade com os números e as suas operações. De uma forma ou de outra, os números fazem parte do dia a dia de grande parte da população, seja para contar, pagar, receber, medir, pesar e etc. Estar familiarizado não significa entender o que são os números. Existem alguns conjuntos de números de largo uso, sendo o mais conhecido o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, cujos elementos representados por algarismos decimais é

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \ldots, n, \ldots\} \tag{1.1}$$

O conjunto $\mathbb{N}$ é muito útil para contar, o pastor conta o rebanho, a católico conta o terço, o sargento conta o número de soldados, os professores contam os alunos, o proprietário conta os seus bens, o político conta os seus correligionários; todos contam!

Os números são mais complexos do que inicialmente eles nos parecem. Devido a importância dos números para o desenvolvimento do conhecimento, por conseguinte do desenvolvimento tecnológico, concordo com a opinião em [2] que considera o sistema numérico que usamos como uma das maiores invenções da humanidade.

Tendo em vista que o leitor já é familiarizado com os números, vamos começar nossa abordagem usando esse conhecimento prévio. Aos poucos regrediremos para questões mais fundamentais e até conceituais sobre os números. É importante que o leitor ao ler sobre as questões mais fundamentais esteja convencido da necessidade de termos uma abordagem teórica tomando os cuidados com o desenvolvimento lógico para assegurarmos que as colunas que seguram o prédio, ao qual chamaremos de sistema numérico, estejam bem firmes.

Os números são introduzidos visando ensinar os jovens a realizarem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Ao ensinarmos os muito jovens, crianças com 5-6 anos de idade, que certamente sabem contar presentes, balas e ovos de Páscoa, lhes impigem saber as tabuadas. Alguns métodos mais modernos usam material didático concreto para tornar a tabuada mais natural e assim induzir o raciocínio embutido nos processos de multiplicação, dessa forma evitando a mera memorização. O método mais antigo era muito concreto, concreto demais, usava o castigo.

Antes de escrevermos o que é um número, vejamos sobre a necessidade de um sistema numérico eficiente e consistente.

O Moises do Velho Testamento foi um pastor de ovelhas. Naquela época, século XII AC, um rebanho deveria ter umas 40 ovelhas, assim, bastava uma sacola de pedras para contá-las. Para os pastores antigos pouco importava o sistema numérico usado, provavelmente nunca pensaram sobre isto, uma vez que suas necessidades numéricas eram pequenas. Já os membros do Exército Romano eram obrigados a fazer contas mais complicadas. Por exemplo, uma Legião Romana era a maior unidade militar contando com mais de três mil homens, os legionários. As Legiões eram comandadas por Tribunos Militares e subdivididas em Centúrias, com cem homens chefiados pelo centurião. Portanto, manter o controle sobre as armas e os soldos do soldados de uma Legião requereria contagens com números bem maiores do que no caso do pastor de ovelhas. Os centuriões tinham uma vida numérica mais fácil do que a de um Tribuno e mais difícil do que a de um pastor. Outra atividade profissional que demanda muito cálculo é a exercida pelo Contador. Ele é o responsável pela contabilidade de uma instituição, cabe a ele fazer o fluxo de caixa, ou seja, determinar os recursos que entram e as suas fontes, assim como direcionar os recursos que saem para pagar salários, impostos, fornecedores, dividas e etc. O Contador tem que efetuar muitos cálculos, talvez com números grandes se a empresa é grande ou se a moeda é muito desvalorizada. Dessa forma, para o Contador é fundamental que a representação numérica seja consistente, precisa e facilite fazer todas as operações numéricas necessárias com precisão e velocidade. Aqui deparamos com uma nova demanda, é necessário que hajam algoritmos eficazes e velozes para resolver cálculos numéricos. Para encerrar a lista de profissionais que demandam sistemas numéricos eficientes, o Cientista esbarra em outro nível de dificuldade. Por exemplo, um Astrofísico com a missão de estabelecer a órbita de um satélite, ou calcular a órbita e a energia de um asteróide, precisará saber determinar o valor do comprimento de uma circunferência com diâmetro d; comprimento esse que sabemos é dado pela fórmula πd. Mas o que é π? Como se calcula π? Os povos antigos sabiam, de maneira empírica, que dada qualquer circunferência C, ao dividirmos o valor L do comprimento de C pelo diâmetro medindo d o valor obtido $\frac{L}{d}$ é uma constante hoje[1] conhecida como π. Em 1761, Johann Heinrich Lambert provou que π é um número irracional, logo, como veremos mais tarde, a sua representação numérica contém um número infinito de dígitos decimais. Em 2019 foram[2] obtidos mais de 30 trilhões de dígitos do número π pela cientista da área de computação Emma Haruka Iwao [**4**]. Foram consumidos 121 dias e 170 terabytes de memória. A título de comparação, 200 mil músicas ocupam um espaço equivalente a 1 tera. Iwao usou 25 máquinas virtuais para obter mais de 30 trilhões de dígitos do π, a mais longa representação decimal até então. Estender a sequência de dígitos do π é muito difícil porque eles não seguem nenhum padrão. Certamente, algoritmos poderosos (armazenamento de memória e velocidade) foram usados no trabalho de Iwao. Para o leitor ter a devida noção sobre a evolução lenta e gradual do valor de π temos a seguinte passagem bíblica

> Livro do Reis, vii-23: O Mar de Fundição.
> *"... fez também o mar de fundição, redondo, de dez covados de uma borda até a outra, de cinco de alto, e um fio de 30 covados era a medida de sua circunferência."*
> (Hirão de Tiro, a serviço do Rei Salomão)

Assim, na Bíblia atribui-se a π o valor $\frac{30}{10} = 3$. Os construtores, carpinterios ou marcenteiros certamente não se atreveriam a usar esse valor para fazer uma peça redonda. Portanto, o cientista requer um conhecimento sobre números bastante mais elaborado do que os exemplos profissionais dados que, na sua totalidade, só fazem uso dos números racionais. Embora a matemática grega tenha desenvolvido muito a Geometria, eles não desenvolveram o conceito de número o suficiente para elucidar alguns dos "mistérios" que encontraram pelos caminhos.

Figure 2. Descoberta de π

[1]Introduzido por William Jones em 1706, o uso da letra grega π foi popularizada por Euler por volta de 1737
[2]Trabalho de Emma Haruka Iwao, funcionária do Google no Japão

1. Sistema Decimal e Números Naturais

A partir do conjunto de algarismos numéricos hindu-arábicos $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos que um número N na base decimal é definido como segue: sejam $\mathcal{I} = \{a_p, a_{p-1}, \dots, a_0 \mid a_i \in \mathcal{A}\}$ e $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n \mid d_j \in \mathcal{A}\}$. Associado aos conjuntos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{D}$, denominados de dígitos, temos o número N

$$N = \overbrace{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}^{\text{parte inteira}}, \overbrace{d_1 d_2 \dots d_n}^{\text{parte decimal}}. \tag{1.2}$$

N tem (p+n) dígitos. Observe que N tem uma parte denominada *inteira* e outra denominada *decimal* denotadas por $\mathcal{I}(N)$ e $\mathcal{D}(N)$, respectivamente. Em quase toda a América do Sul, Europa e em grande parte da África, a vírgula é usada como um separador das partes inteira e decimal de um número. Na América Central, nos Estados Unidos, no sudeste da Ásia, e numa pequena parte da África e Oceania, o ponto é usado no lugar da vírgula.

Exemplos: 1,2; 0,9999; 3,14; 3,1416; 100,78; 73589,16.

O fato de usarmos dez dígitos distintos para representarmos um número da ao sistema o nome de sistema decimal. Por exemplo, o número 23 podemos escrever como $23 = 2.10 + 3$, o número 657 como $657 = 6.100 + 5.10 + 7$ e 9745 como $9745 = 9.1000 + 7.100 + 4.10 + 5$. Usando as potências de 10, isto é, $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $1 = 10^1$ e etc, podemos escrever o número N na Equação (1.1) na forma

$$N = a_p.10^p + a_{p-1}.10^{p-1} + \cdots + a_1.10^1 + a_0.10^0 + d_1.10^{-1} + \cdots + d_n.10^{-n}. \tag{1.3}$$

Nesse caso, dizemos que a representação decimal de N é

$$N = a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0, d_1 d_2 \dots d_n. \tag{1.4}$$

Exemplos:
(i) $N = 12 = 1.10^1 + 2.10^0$,
(ii) $N = 12,1 = 1.10^1 + 2.10^0 + 1.10^{-1}$,
(iii) $N = 17,2345 = 1.10^1 + 7.10^0 + 2.10^{-1} + 3.10^{-2} + 4.10^{-3} + 5.10^{-4}$,
(iv) $N = 89001,09 = 8.10^4 + 9.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 1.10^0 + 0.10^{-1} + 9.10^{-2}$.

Definition 1.1. Um número N é natural se $\mathcal{D}(N) = 0$, ou seja, quando a representação decimal de N é tal que os dígitos decimais são todos iguais a 0 ($d_i = 0$)

$$\begin{aligned} N &= a_p.10^p + a_{p-1}.10^{p-1} + \cdots + a_1.10^1 + a_0.10^0 \\ &= a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0, \end{aligned}$$

onde $a_i \in \mathcal{A}$ para todo $0 \leq i \leq p$.

É necessário que a representação decimal de um número N seja única. Para demonstrarmos que isso ocorre suponhamos que N tenha duas representações decimais distintas;

$$N = a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0, d_1 d_2 \dots d_n = b_{p'} b_{p'-1} \dots b_1 b_0, e_1 e_2 \dots e_{n'}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} N &= a_p.10^p + \cdots + a_1.10^1 + a_0.10^0 + d_1.10^{-1} + \cdots + +d_n.10^{-n}, \\ &= b_{p'}.10^{p'} \cdots + b_1.10^1 + b_0.10^0 + e_1.10^{-1} + \cdots + e_{n'}.10^{-n'}. \end{aligned}$$

É imediato que p'=p e n'=n. Segue que

$$(a_p - b_p).10^p + \cdots + (a_1 - b_1).10^1 + (a_0 - b_0).10^0 + (d_1 - e_1).10^{-1} + \cdots + (d_n - e_n).10^{-n} = 0..$$

Decorre que

$$(a_i - b_i) = 0 \ \Rightarrow \ a_i = b_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq m;$$
$$(d_j - e_j) = 0 \ \Rightarrow \ d_j = e_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Portanto, a representação decimal do número N é única.

Existe um motivo para justificarmos o uso do sistema decimal, esse motivo é o número de dedos que temos nas duas mãos. Os dez dedos que temos nas mãos nos induzem a considerarmos o agrupamento de quantidades em grupos de dez. Isto leva naturalmente a usarmos o sistema decimal, como mostraremos a seguir.

Uma quantidade pode ser contada seguindo a idéia de agrupamento. Queremos agrupar certa quantidade, representada pelo número N, em grupo de dez. Dessa forma, dividimos N por dez para obtermos

$$N = q_1.10 + a_0,$$

sendo que $0 \leq a_0 < 10$. Se $q_1 > 10$ podemos repetir o processo e obter

$$q_1 = 10.q_2 + a_1 \ \Rightarrow \ N = q_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

onde $0 \leq a_1 < 10$. Novamente, se $q_2 > 10$ e repetimos o processo obtemos

$$q_2 = 10.q_3 + a_2 \ \Rightarrow \ N = q_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

onde $0 \leq a_2 < 10$. Podemos continuar aplicando o processo sucessivamente até que $0 < q_n \leq 9$. Quando essa condição for satisfeita o processo parará e obteremos que

$$q_{n-1} = 10.q_n + a_{n-1} \Rightarrow N = q_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

onde $0 \leq a_i < 10$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. Nesse passo o processo não poderá continuar porque q_n sendo menor do que 10 não nos permite dividi-lo por 10. Agora, tome $a_n = q_n$. Assim, cada dígitos a_i é um algarismo decimal pertencente ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Portanto, ao agruparmos a quantidade em grupos de dez obtemos a representação decimal de N como na Equação (1.2), isto é,

$$\boxed{N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0},$$

.

1.1. Ábaco.

O ábaco[3] é um antigo instrumento de cálculo. Atualmente, os modelos existentes fazem uso do sistema decimal. Segundo os historiadores, o primeiro ábaco deve ter surgido na Mesopotâmia há mais de 5500 anos a.C. Diversas civilizações usaram alguma variação do ábaco, por exemplo os babilônios, os egípcios, os gregos, os romanos, os chineses, os japoneses e os hindus. Para que o ábaco seja um instrumento de cálculo eficiente e confiável é necessário que haja um sistema numérico bem definido e consistente para a elaboração dos cálculos. No início dessa seção introduzimos o sistema numérico decimal e mostramos que ele é bem definido, assim todo número admite uma única representação decimal. Mais tarde mostraremos como construir outros sistemas numéricos e a possibilidade de construir ábacos adaptados a eles.

[3]do grego abakos que significa tábua de cálculos, ou soroban em japonês

Para entendermos como funciona o ábaco fixaremos a seguinte nomenclatura:

- a_0 é a casa das unidades (u);
- a_1 é a casa das dezenas (d);
- a_2 é a casa das centenas (c);
- a_3 é a casa de milhares (m);

$\Rightarrow \underline{m}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{u}$

Dependendo da capacidade do ábaco mais casas decimais podem ser usadas. Os ábacos usados nas escolas ou disponíveis no mercado tem apenas de quatro a cinco casas decimais.

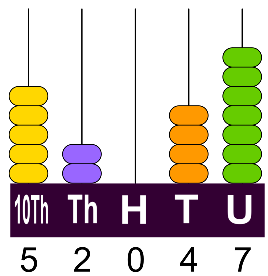

FIGURE 3. 52047 representado com argolas

A maioria dos modelos de ábacos tem diversas hastes onde se colocam argolas. Cada haste corresponde a uma casa da representação decimal, respeitando a ordem da representação, isto é, a casa mais à direita corresponde a casa da unidade, em seguida a casa da dezena, depois a casa da centena, do milhar e etc. Em cada casa é permitido colocar no máximo nove argolas podendo não colocar nenhuma. Por exemplo, o número 52047 é representado no ábaco como indica a Figura 3.

Exercício: Resolva os seguintes itens:

(1) Use a representação decimal dos números 37 e 96 para efetuar as seguintes operações: 37+96 e 37×96.
(2) Quantas argolas serão necessárias para construir um ábaco para representar números de 0 a 1998?
(3) Usando um ábaco, efetua a conta 1735+3451.
(4) Quantos são os números naturais de 1 a 1200 para os quais a soma dos dígitos é 6.
(5) Queremos calcular o quadrado do número $N = d5$, onde d é a casa das dezenas de N e 5 é o dígito da unidade. Conclua que

$$N^2 = (d^2 + d).10^2 + 25.$$

Por exemplo, o quadrado de 65 é 3600+600+25=4225. Calcule $(95)^2$.
(6) Mostre que o número $N = a_4a_3a_2a_1a_0$ é divisível por três se e somente se a soma

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

é divisível por três. $\Big($dica: use o binômio de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ $\Big)$

1.2. Quadrados Mágicos.

Essa é uma atividade lúdica bastante tradicional. A atividade consiste em preencher com os números de 1 a 9 o quadrado na Figura 4 de forma que as somas de todas as linhas, colunas e diagonais tenham o mesmo valor $\mathfrak{m}$ conhecido como soma mágica.

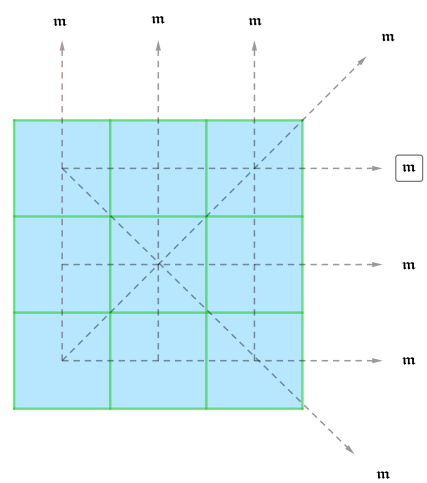

FIGURE 4. $\mathfrak{m}$ é a soma mágica

Solução: O valor da soma de cada linha é chamado de soma mágica, o qual denotaremos por $\mathfrak{m}$. Vamos denotar por Q_{ij} o quadrado na linha i e na coluna j. Assim, temos 9 quadrados:
na primeira linha: Q_{11},Q_{12}, Q_{13};
na segunda linha: Q_{21},Q_{22},Q_{23};
na terceira linha: Q_{31},Q_{32} e Q_{33}.
A cada quadrado Q_{ij} associamos um número natural n_{ij}. De acordo com a regra, temos as seguintes relações:

$$(1) \Rightarrow \begin{array}{l} n_{11}+n_{12}+n_{13}=\mathfrak{m}; \\ n_{21}+n_{22}+n_{23}=\mathfrak{m}; \\ n_{31}+n_{32}+n_{33}=\mathfrak{m}; \end{array}$$

Aqui podemos obter uma informação bastante importante ao observarmos que

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=3\mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}=15.$$

Logo,

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} n_{11}+n_{21}+n_{31}=15; \\ n_{12}+n_{22}+n_{32}=15; \\ n_{13}+n_{23}+n_{33}=15. \end{cases} \quad \text{e} \quad (3) \Rightarrow \begin{cases} n_{11}+n_{22}+n_{33}=15; \\ n_{13}+n_{22}+n_{31}=15; \end{cases}$$

Para preencher os quadrados estaremos procurando por partições de 15 em três valores distintos, por exemplo $(1,5,9)$. Seguem as seguintes observações:
(1) O número n_{22} faz parte de quatro partições distintas de 15.

(2) Os números n_{11}, n_{13}, n_{31} e n_{33} fazem parte, cada um, de três partições de 15.
(3) Os números n_{21}, n_{21}, n_{23} e n_{32} fazem parte, cada um, de apenas duas partições de 15.
Dessa forma, teremos que estudar quais são as partições de 15 em 3 parcelas distintas. Vamos analisar as possibilidades escrevendo os números na ordem

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Sabendo que o número n_{22} ó único a participar de 4 partições vamos tentar obtê-lo primeiro. Mas observe que os números circulados formam uma partição de 15;

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;$$

Claramente, podemos assumir que no quadrado temos $n_{22} = 5$. Vejamos as outras possíveis partições (quando uma partição já tiver sido descrita marcamos com ✓).

$$\text{Com o número 1:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ (\checkmark); \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9. \end{cases} \Rightarrow \text{ 2 partições}$$

$$\text{Com o número 2:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9; \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9. \end{cases} \Rightarrow \text{ 3 partições}$$

$$\text{Com o número 3:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9; \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 2 partições}$$

$$\text{Com o número 4:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 3 partições}$$

$$\text{Com o número 6:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark); \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 3 partições}$$

$$\text{Com o número 7:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 2 partições}$$

$$\text{Com o número 8:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 3 partições}$$

$$\text{Com o número 9:}\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9;\ (\checkmark) \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.\ (\checkmark) \end{cases} \Rightarrow \text{ 2 partições}$$

Concluímos da listagem acima que:
• Os números n_{11}, n_{13}, n_{31} e n_{33} pertencem ao conjunto $\{2,4,8\}$;
• Os números n_{21}, n_{21}, n_{23} e n_{32} pertencem ao conjunto $\{1,3,9\}$.

Agora, complete o quadrado mágico abaixo.

_	_	_
_	5	_
_	_	_

Table 1. Quadrado mágico 3×3

Exercício: Resolva os seguintes itens:

(1) Determine o número mágico e construa um quadrado mágico 3×3 com os números 3,6,9,12,15,18,21,24,27.
(2) Construa um quadrado mágico 4×4.
(3) Quantos quadrados mágicos 3×3 existem?

1.3. Adição de Números Naturais.

Discutiremos o algoritmo da adição assumindo que o leitor já é familiarizado com os números naturais.

A necessidade de termos um algoritmo advém das operações com números grandes que tenha mais de três ou quatro dígitos. Vejamos os seguintes exemplos:

Na adição, a nomenclatura usada é a seguinte:

$$\begin{array}{rcc} & 2\ 3 & \leftarrow \text{parcela} \\ + & 5\ 6 & \leftarrow \text{parcela} \\ \hline & 7\ 9 & \leftarrow \text{soma} \end{array}$$

A seguir apresentamos as operações de adição A1 e A2;

$$\textbf{(A1)} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ & & 7 & 2 & 4 \\ + & & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 8 & 0 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \textbf{(A2)} \quad \begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & 1 & \\ & & 9 & 7 & 8 & 6 \\ + & & 4 & 5 & 7 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 6 & 4 \end{array}$$

Os números "1" dentro de um círculo são chamados "vai um", eles ocorrem quando a soma da casa for superior a 9. É fácil explicar o "vai um" usando a representação decimal.
• Na adição A1 temos

$$\begin{aligned} &(7.10^2 + 2.10^1 + 4) + (4.10^2 + 5.10^1 + 6) \\ =&(7+4).10^2 + (2+5).10^1 + (4+6) = 11.10^2 + 7.10^1 + 10 \\ =&(10 + 1).10^2 + (7 + 1).10^1 + 0 = 1.10^3 + 1.10^2 + 8.10^1 + 0 \\ =&1180. \end{aligned}$$

- Na adição A2 temos

$$
\begin{aligned}
&(9.10^3+7.10^2+8.10^1+6)+(4.10^3+5.10^2+7.10^1+8)\\
=&(9+4).10^3+(7+5).10^2+(8+7).10^1+(6+8)=13.10^3+12.10^2+15.10^1+14\\
=&(1.10+3).10^3+(1.10+2).10^2+(1.10+5).10^1+1.10+4\\
=&1.10^4+(3+1).10^3+(2+1).10^2+(5+1).10^1+10+4\\
=&1.10^4+4.10^3+3.10^2+6.10^1+4.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o algoritmo para a adição de dois números M e N é bastante simples, basta somarmos os coeficientes das potências de dez como segue: sejam

$$
\begin{aligned}
M &= a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0,\\
N &= b_n 10^n + b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0.
\end{aligned}
$$

A soma dos coeficientes da potência ℓ de 10 somados resulta

$$\left(a_\ell 10^\ell + b_\ell 10^\ell\right) = (a_\ell + b_\ell)10^\ell$$

Como a_ℓ e b_ℓ são dígitos, temos que $0 \le (a_\ell + b_\ell) \le 18$, assim temos que as seguintes possibilidades:

$$
\begin{aligned}
&(i)\,(a_\ell + b_\ell) = r,\ 1 \le r \le 9,\\
&(ii)\,(a_\ell + b_\ell) = 1.10 + r,\ 0 \le r \le 8
\end{aligned}
$$

Portanto, se $(a_\ell + b_\ell) \ge 10$ então "vai um";

$$(a_\ell + b_\ell)10^\ell = \left(1.10 + r\right).10^\ell = 1.10^{\ell+1} + r.10^\ell.$$

Exercícios: Justifique nos itens abaixo porque o sistema usado para somar dois números funciona.

(1) 891+789

$$\begin{array}{ccc}8&9&1\\7&8&9\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc}9&0&0\\7&8&0\end{array} \Rightarrow \boxed{1\ \ 6\ \ 8\ \ 0}$$

(2) 673+428

$$\begin{array}{ccc}6&7&3\\4&2&8\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc}6&8&1\\4&2&0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc}7&0&1\\4&0&0\end{array} \Rightarrow \boxed{1\ \ 1\ \ 0\ \ 1}$$

(3) 15631+27829

$$\begin{array}{ccccc}1&5&6&3&1\\2&7&8&2&9\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc}1&5&6&4&0\\2&7&8&2&0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc}1&5&6&6&0\\2&7&8&0&0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc}1&6&4&6&0\\2&7&0&0&0\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc}2&3&4&6&0\\2&0&0&0&0\end{array} \Rightarrow \boxed{4\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 0}$$

(4) O método usado nos exemplos abaixo era conhecido como "versão longa", muito usada na Europa no século XVI.

(a) 891+789

$$\begin{array}{cccc}
 & 8 & 9 & 1 \\
 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
 & & 1 & 0 \\
 & 1 & 7 & \\
1 & 5 & & \\
\hline
1 & 6 & 8 & 0
\end{array}$$

(b) 673+428

$$\begin{array}{cccc}
 & 6 & 7 & 3 \\
 & 4 & 2 & 8 \\
\hline
 & & 1 & 1 \\
 & & 9 & \\
1 & 0 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

(c) 15631+27829

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 5 & 6 & 3 & 1 \\
2 & 7 & 8 & 2 & 9 \\
\hline
 & & & 1 & 0 \\
 & & & 5 & \\
 & 1 & 4 & & \\
1 & 2 & & & \\
3 & & & & \\
\hline
4 & 3 & 4 & 6 & 0
\end{array}$$

(5) Na adição de três parcelas pode ocorrer o "vai dois", dê um exemplo :
(i) Verifique que na soma de duas parcelas só ocorre o "vai um".
(b) Investigue o que pode ocorrer na soma de três, quatro, cinco, seis,... parcelas.
(c) Um estudante estava adicionando algumas parcelas e aconteceu um "vai doze". Em que casa deve ser somado esse doze?

(6) Compare o método usual de realizar uma adição com o método "versão longa" definido no exercício 4 acima e chegue a alguma conclusão do tipo:
(a) Qual é o método mais simples?
(b) O método da "versão longa" deveria ser apresentado aos estudantes? Justifique a sua resposta.

1.4. Subtração de Números Naturais.

Enquanto a adição esta relacionada a acrescentar quantidades,valores, extensões a subtração esta relacionada a retirar quantidades, valores, extensões e completar. Sendo assim, a subtração é um processo inverso ao da adição para efeitos de quantificar uma quantidade sujeita a acréscimos ou decréscimos.

Na operação de subtração se usa a seguinte nomenclatura:

$$\begin{array}{ccccl}
 & 7 & 2 & 4 & \leftarrow \text{minuendo} \\
- & 4 & 5 & 6 & \leftarrow \text{subtraendo} \\
\hline
 & 2 & 6 & 8 & \leftarrow \text{diferença ou resto}
\end{array}$$

Nesta seção, chamamos a atenção de que não usaremos o conceito de número negativo, o que será feito quando estudarmos os números inteiros. A diferença é tênue. Nesta seção sabemos o que fazer para obter o resultado de (7-2) mas não sabemos o que é (2-7) porque não é um número natural.
Observação: Chamamos a atenção para o seguinte exemplo: vamos calcular a subtração 81-56. Usando a representação decimal temos que

$$81 - 56 = 8.10^1 + 1 - 5.10^1 - 6 = (8-5).10^1 + (1-6).$$

como não sabemos o que é (1-6) vamos emprestar uma dezena, ou seja, vamos somar zero a expressão

1-6=1+10-10-6=11-10-6=(11-6)-10.

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} 81 - 56 &= 8.10^1 + 1 - 5.10^1 - 6 = (8-5).10^1 - 10 + (11-6) \\ &= \left[8 - 5 - 1)\right].10^1 + (11 - 6) = 2.10^1 + 5 = 25. \end{aligned}$$

No caso, é a regra do "empresta um" para a casa das unidades do minuendo e "toma o um de volta" na casa das dezenas do subtraendo.

$$\begin{array}{rcc} & 8 & 1 \\ - & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcc} & 8 & 11 \\ - & (1+5) & 6 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

O algoritmo, ou método, para realizar a subtração entre dois números inteiros será desenvolvido pelo estudante na forma nos exercícios a seguir.

Exercícios: Resolva os seguintes itens:

(1) Realize a subtração 8329-3721 usando a representação decimal dos números.
(2) Explique como realizar no ábaco a subtração 14983-4578.
(3) Método da subtração "apenas adicionando". Observe como é obtido o resultado da subtração 724-456=268

$$\begin{array}{rcrcr} 456 & + & 4 & = & 460 \\ 460 & + & 40 & = & 500 \\ 500 & + & 200 & = & 700 \\ 700 & + & 20 & = & 720 \\ 720 & + & \underline{4} & = & 724 \\ & & 268 & & \end{array}$$

Calcule 37831-27456 usando esse método.
(4) Se considerarmos um número máximo, digamos 10000, podemos transformar a subtração numa operação de adição. É o caso das máquinas de calcular que lidam com uma quantidade finita de casas decimais, por conseguinte, com a limitação de ter um número máximo. Digamos que a máquina conta de 0000 a 9999. Nesse caso, as máquinas consideram o complemento de um número a $\in \mathbb{N}$ definido por c(a) $= 10000 - a$, isto é, o número que falta para que, a partir de a, se obtenha o número máximo permitido

na calculadora. O mecanismo da máquina sabe o complemento de qualquer número. Sendo assim, a subtração se reduz à adição composta com a complmentação

$$a - b = c\big(b + c(a)\big)$$

Verifique que a fórmula acima esta correta.

(5) Explique a seguinte maneira de efetuar a subtração 7296-1859:

(1) substitua cada dígito do subtraendo pelo seu complemento relativo a nove

$$1859 \to 8140$$

(2) some o valor obtido ao minuendo

$$7296 + 8140 = 15436$$

(3) extraia 10000 do valor encontrado em (2) e acrescente 1

$$15436 - 10000 + 1 = \boxed{5437}$$

Esse método pode ser sempre empregado? Justifique.

1.5. Multiplicação de Números Naturais.

A multiplicação de números naturais é uma operação decorrente da adição; digamos que ela simplifica o algoritmo da adição. Temos as seguintes notações para indicar a multiplicação

$$M \times N = M.N.$$

A nomenclatura para executar o algoritmo da multiplicação entre os números M e N, tendo como resultado $M \times N = P$, é a seguinte:

$$\begin{array}{rl} N & \leftarrow \text{multiplicando} \\ \times \quad M & \leftarrow \text{multiplicador} \\ \hline P & \leftarrow \text{produto} \end{array}$$

Vamos considerar dois números com casas da centena, dezena e unidade.

$$574 = 5.10^2 + 7.10^1 + 4,$$

$$829 = 8.10^2 + 2.10^1 + 9.$$

A multiplicação é obtida multiplicando os termos e agrupando nas potências de 10.

$$\begin{aligned} 829 \times 574 &= 829 \times \big(5.10^2 + 7.10^1 + 4\big) \\ &= \underbrace{(829 \times 5)}_{m3} \times 10^2 + \underbrace{(829 \times 7)}_{m2} \times 10 + \underbrace{829 \times 4}_{m1}. \end{aligned}$$

A multiplicação foi reduzida as multiplicações m_1, m_2 e m_3. De fato, precisamos saber multiplicar números entre 1 e 9 com qualquer outro número. Continuando o exemplo, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{m_1} : 4 \times 829 &= 4 \times \big(8.10^2 + 2.10^1 + 9\big) = (4 \times 8).10^2 + (4 \times 2).10^1 + (4 \times 9) \\ &= (4 \times 8).10^2 + (4 \times 2).10^1 + (3.10^1 + 6) = (4 \times 8).10^2 + (8 + 3).10^1 + 6 \\ &= (4 \times 8).10^2 + (1.10^1 + 1).10^1 + 6 = (4 \times 8).10^2 + 1.10^1 + 1.10^1 + 6 \\ &= (3.10^1 + 2).10^2 + 1.10^2 + 1.10^1 + 6 = 3.10^3 + (2 + 1).10^2 + 1.10^1 + 6 \\ &= \boxed{3316} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{m}_1)\quad \begin{array}{cccc} & 1 & 3 & \\ & 8 & 2 & 9 \\ \times & & & 4 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_2 : 7 \times 829 &= 7 \times \left(8.10^2 + 2.10^1 + 9\right) = 56.10^2 + 14.10^1 + 63 \\ &= 56.10^2 + 14.10^1 + (6.10^1 + 3) = 56.10^2 + (14 + 6).10^1 + 3 \\ &= 56.10^2 + 20.10^1 + 3 = 56.10^2 + 2.10^2 + 3 \\ &= (5.10^1 + 6).10^2 + 2.10^2 + 3 = 5.10^3 + (6 + 2).10^2 + 3 \\ &= 5.10^3 + 8.10^2 + 0.10^1 + 3 = \boxed{5803}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{m}_2)\quad \begin{array}{cccc} & 2 & 6 & \\ & 8 & 2 & 9 \\ \times & & & 7 \\ \hline 5 & 8 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_3 : 5 \times 829 &= 5 \times \left(8.10^2 + 2.10^1 + 9\right) = 40.10^2 + 10.10^1 + 45 \\ &= 40.10^2 + 10.10^1 + (4.10^1 + 5) = 40.10^2 + 10.10^1 + 4.10^1 + 3 \\ &= 40.10^2 + 1.10^2 + 4.10^1 + 5 = (4.10).10^2 + 1.10^2 + 4.10^1 + 5 \\ &= 4.10^3 + 1.10^2 + 4.10^1 + 5 == \boxed{4145}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{m}_3)\quad \begin{array}{cccc} & 1 & 4 & \\ & 8 & 2 & 9 \\ \times & & & 5 \\ \hline 4 & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}829 \times 574 &= 4145.10^2 + 5803.10^1 + 3316 \\ 414500 + 58030 + 3316 &= \boxed{475846}\end{aligned}$$

equivalentemente, temos a soma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & 3 & 1 & 6 \\ + & & 5 & 8 & 0 & 3 & \\ & 4 & 1 & 4 & 5 & & \\ \hline & 4 & 7 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{array}$$

A operação de multiplicação de números naturais é simples.

Exercício: Resolva os seguintes itens.

(1) Encontre todos os números naturais m e n que satisfazem a equação

$$nm = n + m.$$

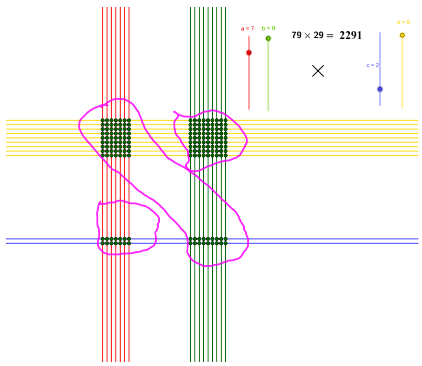

FIGURE 5. $79 \times 29 = 2291$

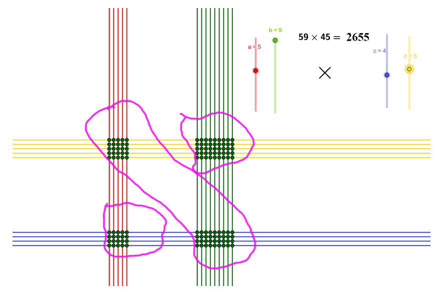

FIGURE 6. $59 \times 45 = 2655$

(2) Método chinês de multiplicação.
O chineses desenvolveram um método para multiplicar números naturais usando varinhas de bambu. Vamos apresentar o método através dos exemplos nas Figuras abaixo
Vamos detalhar o caso $79 \times 29 = 2291$. Representamos as casas decimais do número 79 com sete bambus vermelhos (dezenas) e nove verdes (unidades), e as casa decimais do número 29 com dois bambus azuis (dezenas) e 9 amarelos (unidades). As interseções das varinhas de bambu definem pontos que ao serem contados resultam nos seguintes valores:
(1) (bambus amarelo) $\cap$ (bambus verde): geram $9 \times 9 = 81$ pontos;
(2) (bambus amarelo) $\cap$ (bambus vermelho): geram $7 \times 9 = 63$ pontos;
(3) (bambus azuis) $\cap$ (bambus verdes): geram $2 \times 9 = 18$ pontos;
(4) (bambus azuis) $\cap$ (bambus vermelhos): geram $2 \times 7 = 14$ pontos.
Em seguida o algoritmo prossegue assim:
(5) somando-se os pontos nos itens (2) e (3) obtemos 63+18=81 pontos ;
(6) de posse dos valores 81, obtido no item (1), 81, obtido em (5) e do valor 14, obtido no item (4), o produto é obtido da seguinte maneira:

$$\overbrace{14}^{\text{item (4)}} \quad \overbrace{81}^{\text{item (5)}} \quad \overbrace{81}^{\text{item (1)}}$$

$$\begin{aligned}
&\to 14 \quad 81 \quad 8\,1 \quad \xrightarrow{\text{soma}} \quad 14 \quad 81+8 \quad 1 \\
&\to 14 \quad 89 \quad 1 \quad \to \quad 14 \quad 8\,9 \quad 1 \quad \xrightarrow{\text{soma}} \\
&\to 14+8 \quad 9 \quad 1 \quad \to \quad \boxed{2291}.
\end{aligned}$$

Usando bambus para resolver 59×45, como mostra a Figura 6, temos 5 bambus vermelhos, 9 verdes, 4 azuis e 9 amarelos. Portanto $5 \times 9 = 45$, $5 \times 5 = 25$, $9 \times 4 = 36$ e $5 \times 4 = 20$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&20 \quad 36+25 \quad 45 \quad \to \quad 20 \quad 61 \quad 4\,5 \quad \xrightarrow{\text{soma}} \\
&\to 20 \quad 65 \quad 5 \to \quad 20 \quad 6\,5 \quad 5 \quad \xrightarrow{\text{soma}} \\
&\to 20+6 \quad 5 \quad 5 \to \quad 26 \quad 5 \quad 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2655}
\end{aligned}$$

(3) Use o método chinês do item anterior para calcular 731×298.
(4) Use o método chinês para calcular 2468×97531.

1.6. Divisão de Números Naturais.

A divisão é relacionada aos atos de repartir e comparar. Ela é a operação inversa da multiplicação, embora restrita aos números naturais ela nem sempre seja exata. Por exemplo, se quatro irmãos herdam dez cavalos não é possível dividi-los de maneira equânime porque não é possível agrupá-los em grupos com quatro cavalos, se tentarmos sobrarão dois; de fato, temos que 10=4.2+2.

A divisão é a operação mais difícil realizada com os números naturais.

O exemplo dos herdeiros nos ensina que o primeiro passo é tentar agrupar a quantidade de cavalos em grupos de quatro. Em geral, dada uma quantidade de n elementos que desejamos separar em grupos com apenas t elementos procedemos como segue:
(1) comparar n com t.
(2) Se $n < t$ o agrupamento é impossível.
(3) Se $n \geq t$, observamos que o conjunto de números naturais

$$C = \{n, n-t, n-2t, n-3t, \ldots, n-kt, \ldots\}$$

é decrescente, portanto[4] existe um elemento $r \in C$ tal que r é o menor número do conjunto. Quando r=0 dizemos que n é divisivel por t, se $r > 0$ dizemos que a divisão de n por t tem quociente q e resto r, ou seja,

$$n = t.q + r, \text{ onde } 0 \leq r < t. \tag{1.5}$$

Veja que não podemos ter $r \geq t$, caso isto ocorra poderíamos dividir r em grupos de t objetos, o que violaria o Princípio da Boa Ordem 1.1.

Para descrevermos como funciona o algoritmo da divisão, lembramos que a divisão de n por t com quociente q e resto r descrita na Equação (1.5) é representada, para efeitos da apresentação do algoritmo, na forma

$$\begin{array}{l|l} n & t \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{l} \text{onde n é o dividendo, t é o divisor,} \\ \text{q é o quociente e r é o resto} \end{array}$$

Exemplos: Apresentaremos o algoritmo através dos exemplos a seguir.

(1) $25 \div 7$ Começamos observando que ao extrairmos 7 obtemos:
(1) $25 - 7 = 18 > 7$,
(2) $18 - 7 = 11 > 7$,
(3) $11 - 7 = 4 < 7 \Rightarrow$ não é possível continuar extraindo 7.
Portanto, 25-3.7=25-21=4 e 25=7.3+4

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 7 \\ \cline{3-3} 2 & 1 & 3 \\ \hline & 4 & \end{array}$$

[4] Ver o Principio da Boa Ordem 1.1

(2) $253 \div 7$,
Temos que $253 = 2.10^2 + 5.10^1 + 3 = 25.10^1 + 3 = (3.7 + 4).10^1 + 3$, assim

$$253 = 3.7.10^1 + 40 + 3 = 3.7.10^1 + 43 = 3.7..10^1 + 6.7 + 1$$
$$= (3.10^1 + 6).7 + 1 = \underbrace{36}_{\text{quociente}}.7 + \underbrace{1}_{\text{resto}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2&5&3&7\\ \cline{4-4} 2&1&&3\\ \cline{1-3} &4&& \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2&5&3&7\\ \cline{4-4} 2&1&\downarrow&3\\ \cline{1-3} &4&3& \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2&5&3&7\\ \cline{4-4} 2&1&&36\\ \cline{1-3} &4&3&\\ &4&2&\\ \cline{1-3} &&1& \end{array} \Rightarrow \quad 253 = 7.36 + 1$$

(3) $253 \div 17$,
Temos que $253 = 2.10^2 + 5.10^1 + 3 = 25.10^1 + 3$, assim

$$253 = 25.10 + 3 = (1.17 + 8).10 + 3 = 17.10 + 80 + 3 = 10.17 + 83 = 10.17 + 4.17 + 15$$
$$= (10 + 4).17 + 15 = \underbrace{14}_{\text{quociente}}.17 + \underbrace{15}_{\text{resto}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2&5&3&17\\ \cline{4-4} 1&7&&1\\ \cline{1-3} &8&& \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2&5&3&17\\ \cline{4-4} 1&7&\downarrow&3\\ \cline{1-3} &8&3& \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2&5&3&17\\ \cline{4-4} 1&7&&14\\ \cline{1-3} &8&3&\\ &6&8&\\ \cline{1-3} &&15& \end{array} \Rightarrow \quad 253 = 17.14 + 15$$

(4) $7891 \div 234$

$$\begin{array}{cccc|c} 7&8&9&1&234\\ \cline{5-5} \end{array}$$

Uma vez 7=2.3+1, podemos colocar 2 no quociente, o que resultaria em

$$\begin{array}{cccc|c} 7&8&9&1&234\\ \cline{5-5} 4&6&8&&2\\ \cline{1-3} 3&2&1&& \end{array}$$

mas 2.234=468 e 789-468=321>234, ou seja, podemos colocar no quociente 3 em vez de 2;

$$\begin{array}{cccc|c} 7&8&9&1&234\\ \cline{5-5} 7&0&2&&3\\ \cline{1-3} &8&7&& \end{array}$$

Em seguida, abaixando o 1 obtemos 871, e

$$\begin{array}{cccc|c} 7&8&9&1&234\\ \cline{5-5} 7&0&2&\downarrow&3\\ \cline{1-4} &8&7&1& \end{array}$$

Se tentarmos colocar 4 no quociente observe que $4.234 = 936 > 871$, ou seja, resultaria em

$$\begin{array}{rrrr|l}
7 & 8 & 9 & 1 & 234 \\ \cline{5-5}
7 & 0 & 2 & \downarrow & \;34 \\ \cline{1-4}
 & 8 & 7 & 1 & \\
 & 9 & 3 & 6 & \\ \cline{1-4}
 & & <0 & &
\end{array}$$

um resto menor do que 0, o que não é permitido. Então voltamos e, em vez de 4, usamos o 3;

$$\begin{array}{rrrr|l}
7 & 8 & 9 & 1 & 234 \\ \cline{5-5}
7 & 0 & 2 & \downarrow & \;33 \\ \cline{1-4}
 & 8 & 7 & 1 & \\
 & 7 & 0 & 2 & \\ \cline{1-4}
 & 1 & 6 & 9 &
\end{array}$$

Portanto, 7891=234.33+169. Usando a representação decimal, temos que

$$\begin{aligned}
7891 &= 789.10^2 + 1 = (3.234 + 87).10^2 + 1 = (3.10^2) \times 234 + 871 \\
&= (3.10^2) \times 234 + (3.234 + 169) = (3.10^2 + 3) \times 234 + 169 = 33.234 + 169
\end{aligned}$$

(5) $18.724.571 \div 6372$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6372 \\ \cline{9-9}
\end{array}$$

Vamos começar a divisão observando que $18724 = 2 \times 6372 + 5980$;

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6372 \\ \cline{9-9}
1 & 2 & 7 & 4 & 4 & & & & \;\;\;2 \\ \cline{1-6}
 & 5 & 9 & 8 & 0 & & & &
\end{array}$$

A seguir temos que $5980\,5 = 6372 \times 9 + 2457$;

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6372 \\ \cline{9-9}
1 & 2 & 7 & 4 & 4 & \downarrow & & & \;\;29 \\ \cline{1-6}
 & 5 & 9 & 8 & 0 & 5 & & & \\
 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2 & 4 & 5 & 7 & & &
\end{array}$$

Segue de $2457\,7 = 6372 \times 3 + 5461$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6372 \\ \cline{9-9}
1 & 2 & 7 & 4 & 4 & & & & \;293 \\ \cline{1-6}
 & 5 & 9 & 8 & 0 & 5 & & & \\
 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2 & 4 & 5 & 7 & 7 & & \\
 & & 1 & 9 & 1 & 1 & 6 & & \\ \cline{3-7}
 & & & 5 & 4 & 6 & 1 & &
\end{array}$$

Segue de $54611 = 6372 \times 8 + 3635$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6372 \\ \cline{9-9}
1 & 2 & 7 & 4 & 4 & & & & 2938 \\ \cline{1-5}
 & 5 & 9 & 8 & 0 & 5 & & & \\
 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2 & 4 & 5 & 7 & 7 & & \\
 & & 1 & 9 & 1 & 1 & 6 & \downarrow & \\ \cline{3-7}
 & & & 5 & 4 & 6 & 1 & 1 & \\
 & & & 5 & 0 & 9 & 7 & 6 & \\ \cline{4-8}
 & & & & 3 & 6 & 3 & 5 &
\end{array}
$$

Como $3635 < 6372$ o processo para. Logo,

$$18.724.571 = 6372 \times 2938 + 3635.$$

Exercício: Obtenha o quociente e o resto da divisão $18.724.571 \div 6372$ usando a representação decimal do dividendo e do divisor.

O algoritmo da divisão é o mais elaborado dentre os algoritmos para operar com os números naturais, ele requer que todo passo seja checado para verificar se o resto é maior do que 0 e menor do que o divisor. O processo se encerra quando o resto for menor do que o divisor.

2. Sistema Decimal e Números Reais

Agora que sabemos como representar qualquer quantidade como um número no sistema decimal, vejamos algumas situações que surgem ao considerarmos a representação decimal na Equação (1.3).

Dizemos que um conjunto é finito se podemos contar o número de elementos dele e se o valor obtido é um número limitado. Por exemplo, o conjunto de grãos de areia da praia de Copacabana tem um número finito de grãos. O conjunto de estrelas na Via Láctea também tem um número finito de estrelas. Ambos os exemplos tem um número muito grande, mas ambos são finitos. Um conjunto que não é finito dizemos que é infinito.

Um número N é representado pela sua parte inteira $\mathcal{I}(N) = \{a_p, \ldots, a_1, a_0\}$ e pela sua parte decimal $\mathcal{D}(N) = \{d_p, \ldots, d_1, d_0\}$. O conjunto $\mathcal{I}(N)$ é sempre finito, caso contrário N seria um um número representando uma quantidade ilimitada, ou seja, tão grande quanto desejássemos. Por exemplo, considere a soma

$$s = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{10} + 10^{10^{10}} + \cdots \Rightarrow ''\infty'' = \text{infinito}$$

O símbolo ∞ não representa um número, representa uma quantidade que cresce sem nunca atingir um limite, é ilimitado. Nesse caso, dizemos que a soma diverge. Ou seja, o número $s = \ldots 111 \ldots 11$ não faz sentido algum.

Agora, considere o número $u = 0,11111\ldots 11111\ldots$ cuja parte decimal $\mathcal{D} = \{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ é "infinita". Podemos determinar o valor de u procedendo como segue:

$$\begin{aligned} u &= 0,1111\ldots 1111\ldots, \\ 10.u &= 1,1111\ldots 1111\ldots. \end{aligned}$$

Subtraindo obtemos

$$10u - u = 1 \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{9}.$$

u é dado pela soma

$$u = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{10}} + \cdots + \frac{1}{10^{10^{10}}} + \ldots$$

Observamos que a soma acima é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$. Podemos determinar o valor da soma através do seguinte procedimento

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{10}} + \cdots + \frac{1}{10^{10^{10}}} + \ldots \\ \frac{1}{10}u &= \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{10}} + \cdots + \frac{1}{10^{10^{10}}} + \ldots \end{aligned}$$

Subtraindo as somas acima resulta em

$$(1 - \frac{1}{10})N = \frac{1}{10} \;\Rightarrow N = \frac{1}{9}$$

Portanto, dizemos que a soma que define u converge para $\frac{1}{9}$. É do conhecimento do leitor que $\frac{1}{9}$ é um número racional. Isso significa que números com parte decimal infinita podem fazer sentido. Surge uma questão bastante interessante;

Questão 1.1. Quais são os números com parte decimal infinita que fazem sentido? Isto é, quando a soma dos termos que definem a parte decimal de N converge?

Na Matemática, sempre que estivermos frente a uma soma infinita, em geral, um processo infinito, devemos tomar todos os cuidados para saber se a soma converge ou diverge.

2.1. Sequências I.

Ao discutirmos o caso de números com parte decimal ilimitada tocamos num assunto bastante delicado, o "∞". Para tratarmos dos casos que nos interessam precisaremos introduzir alguns conceitos.

Definition 1.2. Uma sequência é um conjunto de números $\mathcal{S} = \{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}, \dots\}$ definido por uma função que associa a cada número natural n um número a_n.

$$n \to \mathrm{a}_n.$$

Quando nos referirmos a uma sequência $\mathcal{S}$ muitas vezes mencionamos "a sequência $\{a_n\}$"; um claro abuso de linguagem.

Associada a uma sequência temos a sequência $\{s_n\}$ definida pelas somas parciais

$$\mathrm{s}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}$$

Dessa forma, obtemos uma outra sequência $\mathcal{S}_{\text{soma}} = \{\mathrm{s}_0, \mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots, \mathrm{s}_n, \dots\}$.
Exemplo: No exemplo acima onde $\mathrm{N} = 0,111\dots11\dots$ temos que $a_n = \frac{1}{10^n}$ e

$$\mathrm{s}_\mathrm{n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$

Usando o mesmo expediente, temos que

$$\mathrm{s}_\mathrm{n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n},$$
$$\frac{1}{10}\mathrm{s}_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}$$

Logo, subtraindo as expressões acima obtemos

$$(1 - \frac{1}{10})\mathrm{s}_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} \;\Rightarrow\; \mathrm{s}_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Podemos analisar o comportamento do termo $\mathrm{b}_n = \frac{1}{10^n}$ na Tabela 2 abaixo para concluirmos que quando o valor de n cresce b_n tende a zero; Portanto, podemos afirmar que quando $n to \infty$

n	1	2	3	4	5	6	7
b_n	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001

TABLE 2. n crescendo e b_n decrescendo

temos que $\mathrm{s}_n \to \frac{1}{9}$, conforme obtivemos anteriormente.

Definition 1.3. Uma série é uma soma com infinitas parcelas. Dado uma sequência $\{\mathrm{a}_n\}$ definimos a série

$$\mathrm{s} = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_n + \dots.$$

A série s define uma sequência $\{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_3, \ldots, s_n, \ldots\}$ definida pelas somas parciais

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Séries é uma assunto *per si* em Matemática. Somar infinitas parcelas destroça a nossa intuição com situações esquisitas, por exemplo, ao alterarmos a ordem das parcelas o resultado da soma muda. Usaremos um conhecimento simples sobre séries.

Um número representado no sistema numérico decimal por $N = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots$ requer cuidados para ser descrito devido ao fato de que, de fato, ele é a soma infinita

$$N = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_1}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \ldots . \tag{1.6}$$

Algumas observações são importantes para que a série (1.6) faça sentido, isto é, seja limitada e convergente.
(i) A série (1.6) é limitada.
Observamos que $d_n \leq 9$ para todo n. Logo,

$$\begin{aligned} N &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_1}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots \leq 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} \right) \\ &\leq 9 . \frac{1}{9} = 1 \end{aligned}$$

Logo, $0 < N < 1$.
(ii) a série (1.6) é convergente. De fato, essa afirmação merece o *status* de Teorema.

Teorema 1.1. *A série (1.6) é convergente.*

Para demonstrarmos do Teorema acima precisaríamos saber responder a seguinte pergunta: se $0 < N < 1$ e a sequência das somas parciais $\{N_0, N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots\}$ é monótona crescente, isto é, para todo n temos que $N_n < N_{n+1} < 1$, então a série converge? A resposta é sim, nesse caso a série converge; digamos que N_n converge para $c < 1$ e indicamos por

$$\lim_{n \to \infty} N_n = c.$$

Observação 1. A resposta dada a pergunta pode ser respondida intuitivamente. Para demonstrá-la precisaríamos nos aprofundar no estudo sobre os números reais, os quais já sabemos usá-los para representarmos medidas diversas, para operá-los somando, subtraindo, multiplicando e dividindo, mas não sabemos muito sobre eles, exceto que existem!

Para darmos continuidade e respondermos a Questão 1.1 vamos considerar duas possibilidades:
(1) o número N (1.6) é uma dízima periódica.
(2) O número N (1.6) não é uma dízima periódica.

2.2. Dízimas Periódicas.

Os algarismos decimais de um número definem uma série que vimos ser c onvergente, queremos saber para que valor ela converge. Há duas situações para ser analisadas:

(1) os algarismos decimais tem uma lei de formação repetitiva. Exemplos:

$$0,111\dots111\dots, \text{ o algarismo 1 repete,}$$
$$0,12121212\dots12\dots, \text{ os algarismos 12 se repetem,}$$
$$0,123123123\dots123\dots \text{ os algarismos 123 se repetem,}$$
$$0,\underbrace{d_1d_2\dots d_n}_{\text{repete}}\dots\underbrace{d_1d_2\dots d_n}\dots\underbrace{d_1d_2\dots d_n}\dots$$

Definition 1.4. Dizemos que um número N é uma dízima periódica quando a sua parte decimal tem uma formação repetitiva a partir de uma determinada casa decimal, isto é,

$$0,c_1c_2\dots c_\ell\underbrace{d_1d_2\dots d_n}_{\text{repete}}\dots\underbrace{d_1d_2\dots d_n}\dots\underbrace{d_1d_2\dots d_n}.$$

Nesse caso, escrevemos a representação decimal de N na forma

$$0,c_1c_2\dots c_\ell\overline{d_1d_2\dots d_n}.$$

Exemplo 1.1. Os seguintes números são dízimas periódicas:
- $85,047\overline{12} = 85,04712\dots12\dots12\dots.$
- $1,3851\overline{732189} = 1,3851732189\dots732189\dots732189\dots.$
- $34,76\overline{890321112} = 34,76890321112\dots890321112\dots890321112\dots.$
- $1000,46\overline{987654321} = 1000,46987654321\dots987654321\dots987654321\dots.$

Temos as seguintes nomenclaturas para as dízimas periódicas:
(i) O período de uma dízima periódica é formado pelos dígitos que se repetem. Por exemplo, o período de $1,\overline{142857}$ é 142857.
(ii) O comprimento do período de uma dízima é o número de dígitos que compoêm o período. Por exemplo, o comprimento do período de $1,\overline{142857}$ é 6.
(ii) Os algarismos que aparecem na parte decimal sem participar do período é chamado de anteperíodo. Por exemplo, o anteperíodo de $1,39\overline{142857}$ é 39 e o anteperíodo de $1,222\overline{3456}$ é 222.

Para investigarmos as dízimas periódicas vamos considerar os seguintes casos:

(i) $N = 1,\overline{5}$.

$$N = 1,555\dots5\dots5\dots,$$
$$\text{multiplique N por 10: } 10.N = 15,55\dots5\dots5\dots$$

Subtraindo obtemos

$$(10-1)N = 14 \;\Rightarrow\; N = \frac{14}{9}$$

(ii) $N = 1,3\overline{5}$.

$$\text{multiplique N por 10: } N = 13,555\dots5\dots5\dots,$$
$$\text{multiplique N por } 10^2\text{: } 10.N = 135,555\dots5\dots5\dots$$

Subtraindo obtemos

$$(100-10)N = 122 \;\Rightarrow\; N = \frac{122}{90}$$

(iii) $N = 0,\overline{59}$.

$$N = 0,5959\ldots59\ldots59\ldots,$$

$$\text{multiplique N por } 10^2\text{: } 10^2.N = 59,59\ldots59\ldots59\ldots$$

Subtraindo obtemos

$$(10^2 - 1)N = 59 \;\Rightarrow\; N = \frac{59}{99}$$

(vi) $N = 1,2\overline{59}$.

$$\text{multiplique N por 10: } N = 12,59\ldots59\ldots59\ldots,$$

$$\text{multiplique N por } 10^3\text{: } 10^3.N = 1259,59\ldots59\ldots59\ldots$$

Subtraindo obtemos

$$(10^3 - 10)N = 1247 \;\Rightarrow\; N = \frac{1247}{990}$$

(vii) $N = 1,2345\overline{678}$.

$$\text{multiplique N por } 10^4\text{: } 10^4.N = 12345,678\ldots678\ldots678\ldots,$$

$$\text{multiplique N por } 10^{4+3}\text{: } 10^7.N = 12345678,678\ldots678\ldots678\ldots$$

Subtraindo obtemos

$$(10^7 - 10^4)N = 12333333 \;\Rightarrow N = \frac{12333333}{9990000}.$$

(viii) $N = 85,047\overline{12}$.

$$\text{multiplique N por } 10^3\text{: } 10^3.N = 85047,\overline{12},$$

$$\text{multiplique N por } 10^{3+2}\text{: } 10^5.N = 8504712,\overline{12}$$

Subtraindo obtemos

$$(10^5 - 10^2)N = 8419665 \;\Rightarrow\; N = \frac{8419665}{99900}$$

Com todos os exemplos acima podemos demonstrar a seguinte afirmação.

Proposição 1.1. *Qualquer dízima periódica N pode ser escrita na forma* $N = \frac{p}{q}$ *onde p e q são números naturais.*

Proof. Considere a dízima periódica $N = \mathrm{a_p}$

$$N = \mathrm{a_m}\ldots\mathrm{a_1a_0},\mathrm{b_1}\ldots\mathrm{b_n}\overline{\mathrm{c_1}\ldots\mathrm{c}_\ell}$$

Ao multiplicarmos N por 10^n obtemos

$$10^n.N = \mathrm{a_m}\ldots\mathrm{a_1a_0b_1}\ldots\mathrm{b_n},\overline{\mathrm{c_1}\ldots\mathrm{c}_\ell}$$

Multiplicando novamente por $10^{n+\ell}$ segue que

$$10^{n+\ell}.N = \mathrm{a_m}\ldots\mathrm{a_1a_0b_1}\ldots\mathrm{b_nc_1}\ldots\mathrm{c}_\ell,\overline{\mathrm{c_1}\ldots\mathrm{c}_\ell}$$

Portanto,

$$N = \frac{\mathrm{a_m}\ldots\mathrm{a_1a_0b_1}\ldots\mathrm{b_nc_1}\ldots\mathrm{c}_\ell - \mathrm{a_m}\ldots\mathrm{a_1a_0b_1}\ldots\mathrm{b_n}}{10^{n+\ell} - 10^n}$$

Defina $p = a_m \ldots a_1 a_0 b_1 \ldots b_n c_1 \ldots c_\ell - a_m \ldots a_1 a_0 b_1 \ldots b_n$ e $q = 10^{n+\ell} - 10^n$; ambos são números inteiros. Logo, $N = \frac{p}{q}$. □

Agora, vamos invetigar como é a representação decimal de um número definido pelo quociente $N = \frac{p}{q}$. Inicialmente, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2. Observe que o nos exemplos a seguir o processo se repete.

(1) $N = \frac{P}{2}$.

$$\text{se } P = 2p \;\Rightarrow\; N = p.$$
$$\text{se } P = 2p + 1 \;\Rightarrow\; N = p + \frac{1}{2} = p + \frac{10}{2}.\frac{1}{10} = p + \frac{5}{10} = p + 0,5.$$

(2) $N = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{3} = \frac{10.1}{3}.\frac{1}{10} = \frac{(3.3+1)}{3}.\frac{1}{10} = \left(3 + \frac{1}{3}\right).\frac{1}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10} = 0,3 + \frac{1}{3}.\frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10}\right).\frac{1}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10^2} = 0,3 + 0,03 + \frac{1}{3}\frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10}\right).\frac{1}{10^2} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10^3} = 0,333 + \frac{1}{3}\frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10}\right).\frac{1}{10^3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10^4} = 0,3333 + \frac{1}{3}.\frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10}\right).\frac{1}{10^4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10^5} \\
&= 0,33333 + \boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

Observamos que o termo $\frac{1}{3}\frac{1}{10}$, destacado na caixa, se repete em todos os passos no processo. Logo, $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$.

(3) $N = \frac{8}{7}$.

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} = 1 + \boxed{\frac{10}{7}}\frac{1}{10} = 1 + \left(1 + \frac{3}{7}\right)\frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{3}{7}\frac{1}{10}$$
$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{30}{7}\frac{1}{10^2} = 1 + \frac{1}{10} + \left(4 + \frac{2}{7}\right)\frac{1}{10^2} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{20}{7}\frac{1}{10^3}$$
$$= 1,14 + \left(2 + \frac{6}{7}\right)\frac{1}{10^3} = 1,14 + \frac{2}{10^3} + \frac{60}{7}\frac{1}{10^4} = 1,142 + \frac{60}{7}\frac{1}{10^4}$$
$$= 1,142 + \left(8 + \frac{4}{7}\right)\frac{1}{10^4} = 1,142 + \frac{8}{10^4} + \frac{40}{7}\frac{1}{10^5} = 1,1428 + \left(5 + \frac{5}{7}\right)\frac{1}{10^5}$$
$$= 1,1428 + \frac{5}{10^5} + \frac{50}{7}\frac{1}{10^6} = 1,14285 + \left(7 + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{10^6} = 1,14285 + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{7}\frac{1}{10^7}$$
$$= 1,142857 + \frac{1}{7}\frac{1}{10^7} = 1,142857 + \boxed{\frac{10}{7}}\frac{1}{10^8}$$

Observamos que o termo $\frac{10}{7}$ se repete, então todo o processo se repete indfinidamente. Logo

$$\frac{8}{7} = 1,\overline{142857}$$

Esse exemplo reflete um padrão existente nos cálculos acima. Os números circulados são os restos obtidos ao dividirmos por 7. Acontece que os restos da divisão por 7 são 0,1,2,3,4,5 ou 6. No exemplo, os restos obtidos são 1,3,2,6,4 e 5, em seguida o resto volta a ser 1. Assim, fica claro que o padrão surge do fato de que o conjunto dos números obtidos como resto pela divisão por 7 é finito.

Proposição 1.2. *A representação decimal de uma fração $\frac{p}{q}$ é uma dízima periódica.*

Decorre das Proposições 1.1 e 1.2 o seguinte Teorema, cuja demonstração incluímos como um projeto. Antes de demonstrá-lo, é fundamental fazer os exercícios a seguir.

Teorema 1.2. *Um número N pode ser representado por uma fração $\frac{p}{q}$, onde* p *e* q *são números naturais se e somente se a sua representação decimal for uma dízima periódica.*

Exercício 1.1. Resolva os seguintes itens:

(1) Seja p um número natural menor do que 9. Mostre que $\frac{p}{9} = 0,pppp\cdots = 0,\overline{p}$.
(2) Generalize o item anterior mostrando que o comprimento do período de qualquer número dividido por 9 é sempre igual a 1.
(3) Preencha a Tabela 3 com o comprimento da dízima obtida na divisão $\frac{p}{q}$, onde $1 \le p, q \le 9$.

2.3. Números Inteiros.

Pelo que expômos anteriormente, o sistema decimal foi construído a partir dos algarismos decimais 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 com o intuito de representar quantidades, mas a necessidade nos

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

TABLE 3. comprimento das dízimas

leva a patamares mais alto na escala abstrata. A vida prática muitas vêzes nos coloca frente a problemas que requerem o uso de equações para chegarmos a uma solução. Por exemplo, se uma pessoa gasta quatro mil durante um mês e o seu salário é de três mil, de quanto ela precisa para não terminar o mês devendo? Considerando x a quantidade que ela precisa, então

$$x + 4 = 3 \Rightarrow \ x = ?.$$

Se uma pessoa recebe x de salário e tem que pagar 10, para não ficar devendo nada ela deve resolver a equação $x + 10 = 0$. Chamamos a atenção ara a presença do zero na equação, lembrando que o zero[5] surge como uma necessidade algébrica já que para efeitos de contar ele é desnecessŕio.

A introdução dos números "negativos" torna-se necessária quando tratamos com equações. Como dissemos anteriormente, a subtração é relacionada a retirada de quantidades, de valores, de extensôes ou também para completar, portanto, os números negativos surgem naturalmente no contexto algébrico.

Definition 1.5. O conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \tag{1.7}$$

onde $n + (-n) = 0$.

Na próxima seção discutiremos a construção dos números a partir dos números Naturais dentro de um contexto mais formal, aqui estamos introduzindo usando a nossa experiência de vida. Salientamos o fato de que os números surgiram da necessidade de contar e evoluíram pela necessidade de resolver equações. É da necessidade de resolver equações para obter soluções para problemas que surge a Álgebra. Por exemplo;
Problema: Um sítio tem apenas porcos e galinhas totalizando 30 animais, os quais juntos somam 84 pés. Determine o número de porcos e galinhas existentes no sítio.
Solução: Considere que o número de porcos seja x e o número de galinhas seja y. Assuma que todos os animais são saudáveis. Como um porco tem quatro pés e uma galinha tem dois pés,

[5]citar livro The Nothing That Is: A Natural History of Zero

temos as seguintes equações

$$\begin{cases} x + y = 30, \;\Rightarrow\; y = 30 - x \\ 4x + 2y = 84, \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; 4x + 2(30 - x) = 4x - 2x + 30 = 84 \;\Rightarrow\; 2x + 30 = 84 \Rightarrow x = 12.$$

Logo, existem 12 porcos e 18 galinhas.

Claro, existem diversos problemas, de diversas áreas do conhecimento humano, que requerem resolver equações para se obter a uma solução, os exemplos dados são extremamente simples. Conclusão: os números inteiros surgem ada necessidade algébrica para resolvermos equações do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros fixos e x e y são variáveis.

2.4. Números Racionais.

Como dissemos, a divisão é relacionada aos atos de repartir e comparar. Por exemplo, uma herança de valor P quando repartida entre Q herdeiros resulta em $\frac{P}{Q}$ para cada herdeiro. Um quarto de uma peça pesando P kg corresponde a um pedaço pesando $\frac{P}{4}$ kg. Também ocorre muito comparar distâncias, por exemplo, dizer que a distância d_{AB} de A até B é três quartos da distância d_{BC} de B até C, isto é, $d_{AB} = \frac{3}{4}d_{BC}$. Assim, temos o conjunto das frações

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ e } q \in \mathbb{N} \right\}$$

O conjunto $\mathcal{F}$ éxatamente o conjunto dos números cuja representação decimal é uma dízima periódica. Tendo o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros disponível, vamos definir o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Definition 1.6. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ e } q \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1.8}$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ surgiu naturalmente ao estudarmos as dízimas periódicas. Do ponto de vista algébrico ele é mais útil do que o conjunto $\mathbb{Z}$, como mostram os exemplos a seguir;

(1) a solução da equação $17x + 39 = 132$ é $x = \frac{95}{17} \in \mathbb{Q}$.

(2) a solução da equação $25x + 673 = 3$ é $x = -\frac{670}{25}$.

Mais a diante voltaremos a discutir os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sob a luz de uma estrutura algébrica mais rica.

2.5. Números Reais I.

Recapitulando, ao analisarmos os dígitos da uma representação decimal de um número N chegamos as seguintes conclusões:

(i) a parte decimal $\mathcal{D}(N)$ é nula se e somente se $N \in \mathbb{Z}$.

(ii) a parte decimal representa uma dízima periódica se e somente se $N \in \mathbb{Q}$.

Vejamos o seguinte exemplo:

$$r = 0,1\overbrace{01}^{2}\overbrace{001}^{3}\overbrace{0001}^{4}\overbrace{00001}^{5}\overbrace{000001}^{6}\overbrace{0000001}^{7}\overbrace{0000001}^{8}\dots\overbrace{00\dots01}^{n}\dots$$

Claramente, o número r acima não é um número inteiro e nem úma dízima periódica, logo não é um número racional.

Fica a seguinte pergunta "no ar": e se a parte decimal não for nula e também não for uma dízima periódica o que é N? Lembramos que a representação decimal (1.6) converge segundo o Teorema 1.1. Esses números que não são dízima periódica chamamos de números irracionais. O conjunto dos números irracionais indicamos por $\mathbb{I}$.

Definition 1.7. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é definido por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

...

O RESTANTE AINDA ESTA INCOMPLETO , PARA AQUI

3. Números Naturais: Construção e Propriedades

3.1. 02 Adição de números.

A adição é relativamente simples de aprender, assim como a subtração, tendo em vista que são bastante intuitivas e corriqueiras. A multiplicação também é simples de ser entendida, no entanto, a abordagem muitas vezes ignora no início o raciocínio que nos leva a multiplicar em detrimento de fazer os alunos decorarem as tabuadas. Memorisar as tabuadas torna-se um status.

É muito simples ensinar uma criança de 6 anos a somar números menores do que 5 usando ambas as mãos, é simples ensinar a soma de números menores do que 20 usando ambas as mãos. As dificuldades surgem rapidamente quando queremos adicionar números maiores, dificuldade essa inerente na Matemática. Para resolver esse problema desenvolvemos os algoritmos. Uma receita de bolo é um algoritmo de ser aplicado para fazer um bolo caseiro, em geral simples e muitas vezes desprezado pelos experientes. No entanto, se alguém for fazer dez mil bolos a receita torna-se indispensável. Vejam, os ingrediente são os mesmo, o problema são as quantidades de cada item da receita. Operação com números é a mesma coisa, somar números pequenos é fácil, basta usar as mãos, já somar números grandes complica e necessitamos de um algoritmos.

Para desenvolvermos um algoritmo para cada uma das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão precisamos descrever o que é um número.

definir numero
comentar que o conceitos era elaborado mais tarde
abaco, metodo chines, russo ....

4. Números Naturais $\mathbb{N}$

O que é contar? Qual o processo mental de percepção, de memória, de juízo e de raciocínio que fazemos ao contar quantas cadeiras estão em volta de uma mesa? O processo de contagem é, certamente, o algoritmo mais antigo na Matemática. Alguns animais tem capacidade limitada de contar, uma galinha dizem que conta até 5. Na Figura ?? mostra a evolução temporal dos algarismos numéricos hindu-arábicos. Usando os algarismos numéricos hindu-arábicos, o conjunto dos números naturais é, hoje em dia, representado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots, n, \dots\} \tag{1.9}$$

A construção do conjunto $\mathbb{N}$ é consequência do processo de contagem, um processo histórico da evolução cognitiva da raça humana. Levou muito tempo para chegarmos a representação dos números naturais na Equação ??; não foi um processo simples. Assim como não foi imediata a criação de celulares ou a iluminação das casas e das cidades.

Dar nomes as quantidades precede o processo de associar a cada uma um símbolo (numérico). Os numerais cardinais são as palavras usadas para designarmos cada uma das quantidades, por exemplo: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e etc. A palavra *um* é usada como um pronome indefinido, ou numeral, ou artigo indefinido ou adjetivo. Há situações em usamos o substantivo *unidade* em vez de *um*. Assim, 1 também representa a unidade.que Temos os numerais ordinários: primeiro, segundo, terceiro e etc; os numerais fracionários: meio, terço, quarto, quinto e etc; os multiplicativos: dobro, triplo, quádruplo e etc. A cada numeral cardinal associamos os símbolos indicados abaixo;

$$
\begin{gathered}
(\text{um}) \to 1,\ (\text{dois}) \to 2,\ (\text{três}) \to 3,\\
(\text{quatro}) \to 4,\ (\text{cinco}) \to 5,\ (\text{seis}) \to 6,\\
(\text{sete}) \to 7,\ (\text{oito}) \to 8,\ (\text{nove}) \to 9
\end{gathered}
$$

A partir do nove é necessário uma notação simbólica para representarmos as quantidades maiores. Associamos ao numeral cardinal dez o símbolo 10. De fato, a idéia é dispormos em linhas conforme indica a tabela abaixo;

linha 0:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
linha 1:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
linha 2:	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Ao atingirmos 99 elementos na contagem o próximo a ser representado é o centésimo. Associamos ao centésimo o símbolo 100, como indica a tabela abaixo;

linha 8:	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
linha 9:	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
linha 10:	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
linha 99:	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999
linha 100:	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009

Ao atribuirmos a ordem na linha e na coluna estabelecemos um padrão a ser seguido;
(1) na linha 0 estão os algarismos numéricos hindu-arábicos.
(2) nas linha 1 a linha 9 os algarismos numéricos hindu-arábicos estão multiplicados por 10.
(3) nas linhas 10 a linha 99 os algarismos numéricos hindu-arábicos multiplicados por $10^2 = 100$.
(4) na linha 100 os algarismos numéricos hindu-arábicos multiplicados por $10^3 = 1000$.
Dessa maneira, temos uma forma de atribuirmos a determinada quantidade um símbolo baseado nos algarismos numéricos hindu-arábicos. Essa maneira de construir os números é conhecida por Sistema Decimal, e que trataremos em seguida nesse Capítulo.

A divulgação do sistema hindu-arábico na Europa, segundo os historiadores, foi realizado por Leonardo Fibonacci através do seu livro *Liber Abaci* publicado em 1202. Fibonacci era filho de um comerciante, por isso esteve muitas vezes em contato com o mundo muçulmano onde aprendeu e percebeu as vantagens do sistema por eles usado. Ele divulgou na Itália renascentista o que aprendeu sobre matemática no mundo Árabe. Não vamos trabalhar sobre o conteúdo histórico, mas recomendamos como um projeto.

Há uma discussão irrelevante para os nosso propósitos sobre se o zero faz parte do conjunto $\mathbb{N}$ ou não. Nesse texto, consideraremos o zero como um elemento em $\mathbb{N}$, as vezes é conveniente extrair o zero e considerar o conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3. \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}\diagdown\{0\}$.

Sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais temos as operações de adição (soma) e multiplicação. Para defini-las observamos que a quantidade representada pelo número $N \in \mathbb{N}$ pode ser representada pela adição de N unidades 1, isto é,

$$N = \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{\text{N vezes}}$$

A soma de dos números naturais n e m define-se assim:

$$\left.\begin{array}{l} m = \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{\text{m unidades}} \\ n = \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{\text{n unidades}} \end{array}\right\} \Rightarrow \; m+n = \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{\text{m+n vezes}}$$

A multiplicação mn é definida como segue:

$$mn = \overbrace{n+n+n+\cdots+n}^{\text{m vezes}}$$

A operações de adição e multiplicação gozam das seguintes propriedades operatórias[6].
Propriedades da adição: $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \to \mathrm{m} + \mathrm{n}$.
(i) associatividade: (n+m)+p=n+(m+p);
(ii) elemento neutro: n+0=0+n=n ;
(iii) comutatividade: n+m=m+n.
Observação: A propriedade (ii) da adição justifica considerarmos $0 \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\mathrm{n}.0 = \overbrace{0+0+0+\cdots+0}^{\text{n vezes}} = 0.$$

Propriedades da multiplição $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \to \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} = \mathrm{mn}$.
(i) associatividade: (nm)p=n(mp);
(ii) elemento neutro: n1=1n=n
(iii) comutatividade: nm=mn
(iv) distributividade: $\mathrm{n}(\mathrm{m}+\mathrm{p}) = \mathrm{nm} + \mathrm{np}$.
(v) $\mathrm{nm} = 0$ se e somente se $\mathrm{n} = 0$ ou $\mathrm{m} = 0$.

Assim, a tripla $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ define uma estrutura algébrica munida com as propriedades enunciadas acima. Entre as propriedades da multiplicação, incluimos o item (v) para garantirmos que se nm=0 entao n=0 ou m=0. Embora esse fato seja intuitivo, não temos como prová-lo a partir das propriedades enunciadas. A estrutura algébrica $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ é muito restrita para resolvermos equações, por exemplo, do tipo $2x + 3 = 4$. Do ponto de vista da Álgebra, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ é uma estrutura muito precária. Essa observação é importante, pois é a busca por conjuntos numéricos onde as equações admitem solução que nos levam a generalizar e estudar diversas estruturas algébricas.

A utilidade do conjunto $\mathbb{N}$ está na sua aplicabilidade para os processos de contagem. A seguir, vamos definir o que é contar ou, equivalentemente, determinar a cardinalidade de um conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$\mathbb{N}(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n\}$$

Definition 1.8. A cardinalidade de um conjunto é o número de elementos contidos no conjunto. Um conjunto X tem cardinalidade n quando há uma bijeção $X \leftrightarrow \mathbb{N}(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

[6] Essas propriedades são assumidas serem verdadeiras.

Estabelecida a bijeção dizemos que X tem n elementos. Nesse caso, dizemos que X é um conjunto finito; caso contrário infinito.

Observe que na definição acima definimos o que é um conjunto ter um número infinito de elementos ou, equivalentemente, cardinalidade infinita. Esse é um conceito que exploraremos mais tarde, pois o conceito de "infinito" é no momento um mero adjetivo. O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. Georg Cantor introduziu, em 1874, o seguinte conceito de enumerabilidade.

Definition 1.9. Um conjunto X é enumerável, ou contável, se existe uma bijeção $X \leftrightarrow \mathbb{N}$.

Exemplos: Os seguintes conjuntos de números são enumeráveis:
(i) números pares $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots\}$. A bijeção é dada por $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, onde $f(n) = 2n$.
(ii) Os múltiplos de um número inteiro k definem o conjunto enumerável $k\mathbb{N}$.
Decorre da multiplicação de números inteiros a operação de potenciação. As potências de 2 são

$$2, 2^2 = 2.2, 2^3 = 2.2.2, \ldots, , 2^n = \overbrace{2.2\ldots2}^{\text{n vezes}}$$

Definition 1.10. Seja $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que o número $k^n = \overbrace{k.k\ldots k}^{\text{n vezes}}$ é uma potência de k com expoente n.

A potência de um número k tem as seguintes propriedades:
(i) $k^0 = 1$ (sobre $\mathbb{N}$, essa propriedade tem que ser assumida);
(ii) $k^m.k^n = k^{m+n}$

4.1. Ordem.
Uma outra propriedade importante do conjunto $\mathbb{N}$ é a existência de uma ordem. Definimos uma ordem em $\mathbb{N}$ de acordo com os seguintes conceitos: lembrando que todo número natural pode ser escrito como a soma de 1.
" Menor que ": Considera-se o número m um número menor que o número n quando m corresponde a uma quantidade inferior a n. Nesse caso indicamos que $m < n$. Exemplos: 4 é antecessor de 5, enquanto que 3 é antecessor de 4. O número 2 é o que antecede 3 e 1 é o antecessor de 2. Já o 0, que não possui antecessor natural, é o número que antecede 1, ou $0 < 1$.
" Maior que ": Considera-se o número n um número maior que o número m quando n corresponde a uma quantidade superior a m. Nesse caso indicamos $n > m$. Exemplos: 1 é o sucessor de 0, enquanto que 2 é o sucessor de 1. O numeral 3 é o que sucede 2 e 4 é o que sucede 3.
Dessa forma, temos que o sinal de $<$ estabelece a ordem crescente

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 \cdots < 107 < \cdots < 1010101 < \ldots$$

e o sinal de $>$ estabelece a ordem decrescente

$$\cdots > 100107 > \cdots > 67 > \cdots > 10 > 9 > 8 > 7 > 6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0.$$

Os seguintes símbolos são frequentemente usados para comparar quantidades ou números:
- $m \leq n$ quando queremos dizer que m é "menor ou igual" a n.
- $n \geq m$ quando queremos dizer que n é "maior ou igual" a m.

Estabelecemos o seguinte princípio :

Princípio 1.1 (da Boa Ordem - PBO). *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ possui um elemento a tal que para todo $x \in X$ temos que $x \geq a$. Dizemos que a é o mínimo de X.*

Princípio da Boa Ordem - Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ possui um elemento a tal que para todo $x \in X$ temos que $x \geq a$. Dizemos que a é o mínimo de X.

4.2. Números Primos.

Dizemos que um número n$\in \mathbb{N}$ é múltiplo de um número k$\in \mathbb{N}$ se existe um número m$\in \mathbb{N}$ tal que n=km. Nesse caso, dizemos que m é um divisor de n. A cada número $k \in \mathbb{N}$ podemos atribuir o conjunto $k\mathbb{N}$ cujos elementos são os múltiplos de k, assim,

$$\mathrm{k}\mathbb{N} = \{\mathrm{kn} \mid \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}. \tag{1.10}$$

Exemplos:
(i) Números pares: $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$.
(ii) $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$.

Para qualquer número n$\in \mathbb{N}$ é natural perguntar quem são os seus divisores, ou fatores. A expressão n=km é uma fatoração de n. Assim, surge uma classe especial de números naturais chamados de números primos, os quais se distingue por não terem divisores além de 1 e de si próprio, ou seja, p é primo se e somente se a única fatoração que admite é p=1.p. Veja que 12=2.6=3.4=2.2.3 não é primo.

Definition 1.11. Um número p$\in \mathbb{N}$ é dito ser primo se p não possui divisores, exceto 1 e p, caso contrário dizemos que p é um número composto. Considere $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid \text{p é primo}\}$ o conjunto dos números primos.

Exemplos: Os números primos menores do que 50 são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

É claro, todo número natural é ou primo ou composto. Caso n seja composto, então podemos fatorá-lo em n=p.a, onde p é primo e a $<$ n. Os números primos tem papel de destaque no estudo dos números, por exemplo pelo papel que desempenham no Teorema Fundamental da Aritmética que abordaremos neste Capítulo. Euclides demonstrou em sua livro Elementos que o conjunto $\mathcal{P}$ dos números primos é infinito. Para provarmos essa afirmação suponhamos que $\mathcal{P} = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n}\}$ é finito e tem n elementos. Agora, consideramos o produto $\mathrm{P} = \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_\mathrm{n}$ e o número $\mathrm{N} = \mathrm{P} + 1$. Como $\mathrm{N} \notin \mathcal{P}$, segue que[7] existe um $\mathrm{p}_\ell \in \mathcal{P}$ e $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{N} = \mathrm{k}.\mathrm{p}_\ell$. Nesse caso, temos que

$$1 = (\mathrm{N}+1) - \mathrm{N} = \mathrm{k}\mathrm{p}_\ell - \mathrm{k}'\mathrm{p}_\ell = (\mathrm{k}-\mathrm{k}')\mathrm{p}_\ell$$

Como 1 não tem divisores, não fatora, segue que essa equação não tem soluções em $\mathbb{N}$. Logo, N não pode fatorar, ou seja, $\mathrm{N} \in \mathcal{P}$. Portanto, o conjunto $\mathcal{P}$ não pode ser finito, consequentemente, $\mathcal{P}$ tem que ter um número infinito de elementos.

Existem diversas questões a respeito dos números primos que são simples de serem enunciadas e que ainda não sabemos resolver. Determinar quando um número é primo é um trabalho

[7] De certa forma, aqui estamos usando a fatoração em números primos.

muito árduo, pois não se conhece um algoritmo rápido. O maior número primo conhecido até novembro de 2022 é

$$2^{82.589.933} - 1.$$

• fonte: faça uma busca na internet com o título *largest prime number*.

Pierre de Fermat conjecturou que o número 4294967297 seria primo. Leonhard Euler provou em 1732 que

$$4294967297 = 641.6700417.$$

Um método antigo para fazer uma lista de números primos é conhecido como o Crivo de Eratóstenes. Se existe um número primo p tal que $N < p^2$, então devemos testar se N é divisível pelos números primos menores do que p. Por exemplo, temos que $473 < 23^2 = 529$. Ao verificarmos se algum dos primos $3, 5, 7, 1, 13, 17, 19, 23$ divide 473 obtemos que $473 = 11.43$, logo não é primo. O Crivo[8] é um método exaustivo de construir uma tabela de números primos inferiores a um determinado número N.

4.3. Princípio da Indução Finita.

O fato dos números naturais serem muito associados aos processos de contagem, surgem situações nas quais verificamos que uma afirmação é verdadeira para um número n de passos e gostariamos de saber se ela é sempre verdadeira, isto é, para um número qualquer de passos. Por exemplo:
(i) uma pessoa joga uma moeda n vezes para o alto e ela cai n vezes com a face da cara para cima. Se ela jogar a moeda mais uma vez então a moeda caíra com a face da cara para cima?
(ii) Ao somarmos os números naturais de 1 a n pela fórmula

$$S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1.11}$$

verificamos que ela sempre da a reposta certa. Podemos concluir que ela vale para todo n$\in \mathbb{N}$? Vamos deduzi-la observando que a soma de cada uma das colunas abaixo

$$\begin{array}{llllllllllllllll} S(n) = 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S(n) = n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

é igual a $(n+1)$. Como existem n termos concluímos que $S(n)$ ́dada pela Equação ??. Essa dedução implica que a fórmula é verdadeira para todo n? Tudo indica que sim, pois ao adicionarmos o termo (n+1) temos que

$$S(n) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = S(n+1).$$

Existem situações, como no Triângulo de Pascal abaixo, no qual observamos diversas identidades que gostariamos de ter certeza se são verdadeiras para todos n e k; por exemplo:
(i) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

---

[8]Crivo significa peneira.

(ii) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

$\boxed{n\backslash k}$	0	1	2	3	4	5	...	n
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	...	$\binom{n}{n}$

Vamos enunciar o seguinte princípio;

Princípio da Indução Finita (PIF) - Seja P(n) uma afirmação enunciada que descreve uma propriedade sobre um número natural n maior ou igual a um número natural n_0 fixado. Se as seguintes condições C1 e C2 abaixo forem verificadas:

C1: $P(n_0)$ é verdadeira (ou seja, vale a propriedade para n_0).

C2: A afirmação P(n) implica que a afirmação P(n+1) é verdadeira, isto é $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq n_0$.

Então, a afirmação P(n) é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplos:

(1) P(n):A soma $S(n) = 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Já mostramos que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Mostre que P(n):$2^n > n$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

vamos verificar as condições C1 e C2 descritas acima. Seja $n_0 = 1$.

C1: Para $n_0 = 1$ temos que P(1) afirma que 2>1, logo P(1) v́erdadeira.

C2: Suponhamos que $2^n > n$ seja verdadeira. Dessa forma,

$$2^{n+1} = 2^n.2 > n.2 > n+1.$$

Portanto, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(iii) Defina número natural "fatorial de n" por $n! = 1.2.3.4\ldots(n-1).n$. Mostre que a afirmação P(n):$2^n < n!$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n_0 = 3$.

C1: Para $n_0 = 4$ temos que P(1) afirma que $2^4 = 16 < 24$, logo verdadeira.

C2: Suponhamos que $2^n < n!$ seja verdadeira. Segue que

$$2^{n+1} = 2^n.2 < (n!).2 < n!.(n+1) = (n+1)!.$$

Portanto, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

O PIF é aceito como um Axioma dos números inteiros.

4.4. Teorema Fundamental da Aritmética (TFA).

O seguinte Teorema é um dos pilares da Teoria de números.

Teorema 1.3 (Fundamental da Aritmética (TFA))**.** *Todo número natural* $n \in \mathbb{N}$ *admite uma decomposição em fatores primos. Além disso, a fatoração é única.*

Proof. Inicialmente, obteremos uma lista $L = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset \mathcal{P}$ de números primos e de números naturais $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ tais que

$$n = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2}\ldots p_k^{\ell_k}. \tag{1.12}$$

Além disso, a fatoração obtida é única. Em seguida, aplicaremos o Princípio da Indução Finita. Considere a afirmação
P(n):Todo número natural $n \in \mathbb{N}$ uma fatoração em números primos e a fatoração é única
Para obtermos uma fatoração de n, procedemos como segue: suponhamos que $n \geq 2$ e seja $D(n)$ o conjunto dos divisores de n. Pelo PBO ??, o conjunto $D(n)$ tem um mínimo $p_1 \in D(n)$, que é o menor dos fatores de n. Assim, temos que $n = p_1.n_1$. O número p_1 tem que ser primo, pois não pode admitir divisores diferentes de 1 e de p_1; caso contrário, p_1 poderia ser fatorado em $p_1 = q_1.m$, da onde concluímos que q_1 é o mínimo de $D(n)$, o que contradiziria a construção de p_1. Agora, aplicamos o mesmo raciocínio para o número n_1 e concluímos que $n_1 = p_2.n_2$, onde p_2 tem que ser primo. Obtemos que $n = p_1.p_2.n_2$, onde p_1 e p_2 são primos. Esse processo sessa após um número de passos, uma vez que toda fatoração de n tem um número finito de fatores. Logo, segue que $n = p_1.p_2 \dots p_t$, onde $p_1, p_2, \dots, p_t \in \mathcal{P}$. Pode ocorrer que alguns dos números primos p_i, $1 \leq i \leq t$, sejam repetidos, logo $n = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2} \dots p_k^{\ell_k}$, onde $k \leq t$ e $\ell_i \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq k$. O fato da fatoração ser única segue da simples observação de que se houvessem duas listas de números primos $L_1 = \{p_1^{\ell_1} \dots p_k^{\ell_k}\} \subset \mathcal{P}$ $L_2 = \{q_1^{\ell_1} \dots q_k^{\ell_k}\} \subset \mathcal{P}$ definindo fatorações distintas para n, digamos que

$$N = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2} \dots p_k^{\ell_k} = q_1^{s_1}.q_2^{s_2} \dots q_k^{s_k}, \tag{1.13}$$

então chegaríamos a um absurdo. Basta observar que decorreria dessa igualdade que algum primo da lista $p_i \in L_1$ teria que dividir um primo da lista $q_j \in L_2$, o que só ocorreria se $p_i = 1$ ou $p_i = q_j$. Logo, a fatoração obtida é única. Agora, reformularemos a afirmação P(n);
P(n): Todo número $n \in \mathbb{N}$ admite uma fatoração única em números primos $n = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2} \dots p_k^{\ell_k}$, onde $\ell_i \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq k$.
Para aplicarmos o PIF precisamos verificar as condições C1 e C2.
<u>C1</u>: P(1)=1 é verdadeira.
<u>C2</u>: P(n) $\Rightarrow$ P(n+1).
Vamos verificar C2. Temos duas possibilidades:
(i) $n + 1 \in \mathcal{P}$; nesse caso segue que P(n+1) é verdadeira e a demonstração esta concluída.
(ii) $n + 1 = rs$, onde $r < n + 1$ e $s < n + 1$. Aplicamos a condição P(n) aos números naturais r e s para obtermos que

$$\left.\begin{array}{l} r = a_1^{\ell_1} \dots a_k^{\ell_k}, \\ s = b_{k'}^{m_1} \dots b_{k'}^{m_{k'}} \end{array}\right\} \Rightarrow n = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2} \dots p_k^{\ell_k}.$$

onde para cada $1 \leq i \leq k$ temos que $p_i = a_j$ ou $p_i = b_j$, para algum $1 \leq j \leq k, k'$. Portanto, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Portanto, segue que todo número inteiro admite uma fatoração única em números primos. □

De acordo com o Teorema TFA ??, dado um número $N \in \mathbb{N}$ existe uma lista, que é única, de números primos $L = \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset \mathcal{P}$ e números naturais $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ tais que

$$N = p_1^{\ell_1}.p_2^{\ell_2} \dots p_k^{\ell_k}.$$

4.5. Algoritmo da Divisão.

4.6. MDC - Maior Divisor Comum.

4.7. MMC - Menor Múltiplo Comum.

5. Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Na busca por um conjunto mais adequado para estudar equações do tipo $ax+b=c$, obtemos uma extensão do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais dada pelo conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$;

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-n,\ldots,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots,n,\ldots\}.$$

Em termos de quantidade, temos que a quantidade (-n) se refere a subtração, isto é, retire 3 maçãs da cesta com 5 maçãs e diga quantas ficaram: ficaram $5+(-3)=2$. Algumas quantidades tem uma natureza negativa intrinseca, por exemplo o dinheiro: se João deve R$200 para a Joana podemos dizer que o saldo do João devido a divida com a Joana é de -R$200. Desta forma, a equação $2x+5=1$ tem solução $x=-2\in\mathbb{Z}$. Observamos que com a introdução dos inteiros algumas equações do tipo $ax+b=c$ passam a ter solução, mas não todas. Por exemplo, a equação 3x=8 não tem solução $x\in\mathbb{Z}$.

Os inteiros herdam as operações de adição e multiplicação definida sobre os números naturais.

Propriedades da adição: $+:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $(\mathrm{m},\mathrm{n})\to \mathrm{m}+\mathrm{n}$
(i) associatividade: (n+m)+p=n+(m+p);
(ii) elemento neutro: n+0=0+n=n
(iii) elemento inverso: para todo $n\in\mathbb{Z}$ existe um elemento $(-n)\in\mathbb{Z}$ tal que

$$n+(-n)=(-n)+n;$$

(iv) comutatividade: n+m=m+n

Propriedades da multiplição $\cdot:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $(\mathrm{m},\mathrm{n})\to \mathrm{m}\cdot\mathrm{n}=\mathrm{mn}$
(i) associatividade: (nm)p=n(mp);
(ii) elemento neutro: n1=1n=n;
(iii) comutatividade: nm=mn;
(iv) se nm = 0, entao ou n = 0 ou m = 0;
(v) distributividade: n(m + p) = nm + np.

Segue das propriedades acima que:
(i) $0n=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.
(ii) $(-1).1=-1$, logo $n+(-n)=n-n=0$, para todo $n\in\mathbb{Z}$.
Sobre os inteiros temos propriedades suficientes que nos permitem demonstrar essa afirmação; veja que

$$\begin{aligned}&0+0=0 \;\Rightarrow\; 2.0=0,\\ &2.(a.0)=a.(2.0)=a.0 \;\Rightarrow\; 2.a.0-a.0=a.0-a.0=0 \;\Rightarrow\; a.0=0\end{aligned}$$

Observe que a propriedade (iv) da multiplicação temos que assumir. Ela nos permite cancelar termos nas equações, isto é, se $\mathrm{n}\neq 0$, então

$$\mathrm{nm}=\mathrm{np} \;\Rightarrow\; \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{p})=0 \overset{(\mathrm{iv})}{\Rightarrow} \mathrm{m}=\mathrm{p},$$
$$\text{ou seja, } \mathrm{n}\cancel{\mathrm{m}}=\mathrm{n}\cancel{\mathrm{p}} \;\Rightarrow\; \mathrm{m}=\mathrm{p}$$

Segue que temos que não existem divisores de 0 em $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.3. *Sejam* $n,m\in\mathbb{Z}$. *Então* $(-1)(-1)=1$.

Assim como no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, também temos uma ordem definida no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Temos que:
– m é menor do que n, e indicamos por $m < n$, se e somente se $0 < n - m$.
– n é maior do que m, e indicamos por $n > m$, se e somente se $n - m > 0$.

6. Números Naturais Racionais $\mathbb{Q}$

Os números racionais surgem naturalmente uma vez que os naturais e os inteiros tenham sido definidos. No processo de contagem é natural perguntarmos quanto vale a metade de certa quantidade N, o que denotamos por $\frac{\mathrm{N}}{2}$. Um exemplo mais geral seria perguntar quantos pedaços de maça receberia cada pessoa se existem 5 maçãs e 3 pessoas. Dividir uma quantidade é algo natural em diversas situações, mas não é o mesmo que contar. Na medição de terrenos entre herdeiros podemos adotar dividir a área do terreno pelo número de herdeiros ou dividir o valor do terreno pelos herdeiros. Dessa maneira, obtemos frações de quantidades.

Definition 1.12. Uma fração de um número natural N é representada por $\frac{p}{q}N$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.

7. Sequências I

8. Criptografia I

Bibliography

[1] Abramo Hefez, *Aritmética*, SBM, 2022.
[2] Roberto Ribeiro Paterlini, *Aritmética dos Números Inteiros*, Departamento de MatemÃ¡tica, UFSCar, 2017.
[3] Manoel Lemos, *Criptografia, Números Primos e Algoritmos*, 4^a edição, IMPA, 2010.
[4] Emma Haruka Iwao - https://en.wikipedia.org/wiki/Emma_Haruka_Iwao